



UNIVERSITÀ
degli STUDI
di CATANIA



SCUOLA SUPERIORE DI CATANIA

Dispense

Stage di preparazione per i Campionati Nazionali di Fisica

Problemi di ottimizzazione

Daniele Battesimo Provenzano

ANNO ACCADEMICO 2025-2026

Indice

1	Moto del proiettile	2
1.1	Parabola di sicurezza	3
1.2	Superare un ostacolo	6
2	Termodinamica	8
3	Altro	11

1 Moto del proiettile

Esempio 1.1 (Gittata massima). *Un cannone posto al suolo spara un proiettile con velocità di modulo v_0 e angolo di lancio α regolabile. Quanto vale la gittata massima?*

Soluzione. Le equazioni parametriche del moto del proiettile, posizionando l'origine degli assi nel punto di lancio al suolo ($h = 0$), sono

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t,$$

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Il proiettile tocca nuovamente il suolo quando $y = 0$. Escludendo la soluzione banale $t = 0$ (istante di lancio), il tempo di volo si ricava da

$$v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = 0,$$

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Sostituendo il tempo di volo nell'equazione della coordinata x , si ottiene la gittata G in funzione dell'angolo di lancio α

$$G(\alpha) = v_0 \cos \alpha \left(\frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \right) = \frac{v_0^2}{g} (2 \sin \alpha \cos \alpha).$$

Utilizzando l'identità trigonometrica della duplicazione del seno, l'espressione della gittata diventa

$$G(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha).$$

La gittata è massima quando la funzione $\sin(2\alpha)$ assume il suo valore massimo possibile, ovvero 1. Questo si verifica quando $2\alpha = 90^\circ$, il che corrisponde a un angolo di lancio $\alpha = 45^\circ$. Sostituendo $\sin(2\alpha) = 1$ nell'equazione, il valore della gittata massima risulta essere:

$$G_{\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Esempio 1.2 (Gittata massima (reloaded)), dalla mente del Profeta [Gimmy](#). *Un cannone, posto ad altezza h rispetto al suolo, spara un proiettile con velocità di modulo v_0 e angolo di lancio α regolabile. Quanto vale la gittata massima?*

Soluzione. Siano $v_x = v_0 \cos \alpha$ e $v_y = v_0 \sin \alpha$ le componenti di $\vec{v}_0$; sia $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ il modulo della velocità con cui il proiettile tocca terra, β l'angolo acuto tra la direzione di $\vec{v}$ e la verticale, $v_1 = v \sin \beta$ e $v_2 = -v \cos \beta$ le componenti di $\vec{v}$. Ovviamente $v_x = v_1$, cioè

$$v_0 \cos \alpha = v \sin \beta.$$

Se il lancio avviene all'istante $t = 0$, il proiettile colpirà terra in un istante τ tale che $v_y - g\tau = v_2$, da cui

$$\tau = \frac{v_y - v_2}{g},$$

che implica che la gittata vale

$$G = v_x \tau = \frac{v_x}{g} (v_y - v_2) = \frac{v_0}{g} \cos \alpha (v_0 \sin \alpha + v \cos \beta).$$

Moltiplicando la prima equazione per $\sin \alpha$ e inserendola nell'espressione della gittata otteniamo

$$G = \frac{v_0 v}{g} (\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta) = \frac{v_0 v}{g} \cos(\alpha - \beta).$$

Se $\alpha = 0$, sicuramente $\beta > 0$; se invece, $\alpha = \pi/2$ sarà $\beta = 0$. Quindi deve esistere α tale che $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ e $\beta = \alpha$. Questo valore di α renderà evidentemente massima la gittata, che varrà

$$G_{\max} = \frac{v_0 v}{g} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

1.1 Parabola di sicurezza

Partendo dalle equazioni parametriche del moto del proiettile lanciato dall'origine degli assi, ricaviamo l'equazione cartesiana della traiettoria

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Sfruttando l'identità trigonometrica $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$, possiamo riscrivere l'equazione in funzione di $\tan \alpha$

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha).$$

Riorganizzando i termini, otteniamo un'equazione di secondo grado nella variabile $\tan \alpha$

$$\frac{gx^2}{2v_0^2} \tan^2 \alpha - x \tan \alpha + \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2} \right) = 0.$$

Affinché un punto di coordinate (x, y) sia fisicamente raggiungibile dal proiettile, deve esistere almeno un angolo di lancio reale α che soddisfi questa equazione. Ciò si verifica se e solo se il determinante dell'equazione è maggiore o uguale a zero

$$\Delta = x^2 - 4 \left(\frac{gx^2}{2v_0^2} \right) \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2} \right) \geq 0.$$

Sviluppando il prodotto e semplificando, si ha

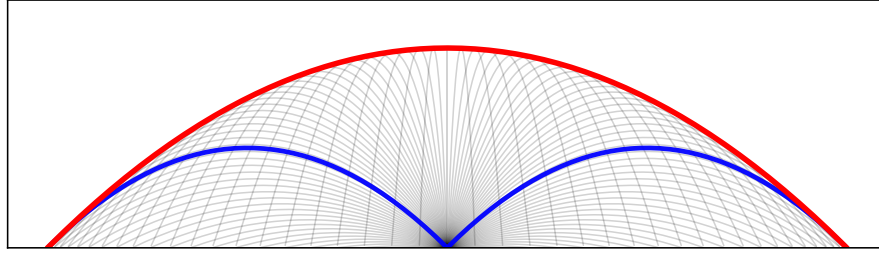
$$x^2 - \frac{2gx^2}{v_0^2} y - \frac{g^2 x^4}{v_0^4} \geq 0.$$

Isolando y , troviamo la condizione che delimita la regione di spazio raggiungibile

$$y \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

L'equazione che descrive il bordo di questa regione rappresenta la curva di involuppo di tutte le possibili traiettorie, nota come parabola di sicurezza

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2$$



$$\text{---} \quad y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \quad \text{---} \quad y(x, \alpha) = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

e mostrata nella figura successiva.

Dimostrazione alternativa. Per determinare l'equazione dell'involuppo delle traiettorie, ripartiamo dall'equazione cartesiana del moto del proiettile in funzione del parametro α

$$y(x, \alpha) = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha).$$

Secondo la teoria degli involuppi, la curva tangente a tutte le traiettorie della famiglia si ottiene imponendo che la derivata parziale dell'equazione rispetto al parametro α sia nulla

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = 0.$$

Calcoliamo la derivata parziale

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{x}{\cos^2 \alpha} \left(1 - \frac{gx}{v_0^2} \tan \alpha \right).$$

Uguagliando la derivata a zero (e scartando la soluzione $x = 0$, che rappresenta banalmente il punto di lancio), ricaviamo la condizione che lega la coordinata x all'angolo α ottimale per i punti appartenenti all'involuppo

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{gx}.$$

Ora sostituiamo questa espressione all'interno dell'equazione della traiettoria originaria per eliminare il parametro e trovare l'equazione dell'involuppo

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

Esempio 1.3 (Gittata massima, reloaded (Parte 2)). Possiamo riprendere l'esempio precedente per mostrare una soluzione alternativa (e più veloce), basata sulla parabola di sicurezza. Infatti, fissato il modulo della velocità v_0 , conosciamo la forma della parabola di sicurezza. Adesso, basta semplicemente trovare i punti di intersezione tra tale parabola, traslata verso l'alto di una quantità h , e la retta che identifica il suolo.

$$y = h + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2,$$

$$y = 0,$$

che implicano

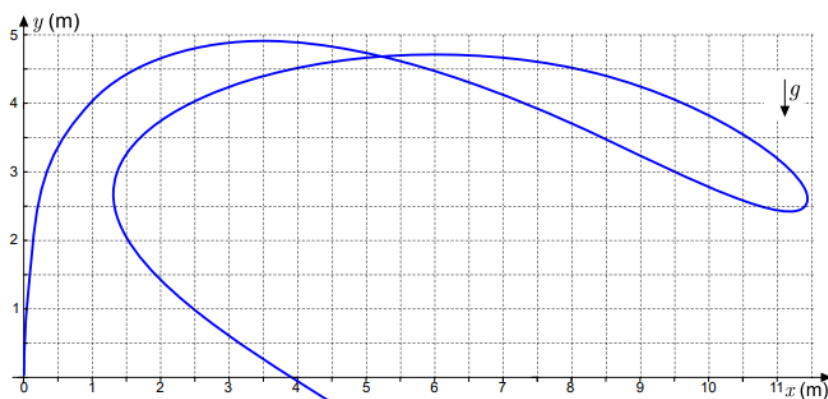
$$x = \pm \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh},$$

quindi possiamo identificare la gittata massima proprio con

$$G_{\max} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh},$$

che si riduce al caso noto per $h \rightarrow 0$.

Esempio 1.4 (Tubo da giardino, dalle EuPhO 2019). *Un getto d'acqua esce dall'ugello di un tubo con una velocità costante sconosciuta v . Un bambino gioca con il tubo ruotandolo casualmente in un piano verticale fisso x - y . L'ugello è mantenuto in $x = y = 0$ m, e l'angolo tra l'asse dell'ugello e l'orizzontale non è mai inferiore a 45° . In ogni istante, il getto nell'aria ha una forma irregolare. La forma in un certo istante è mostrata nella figura sottostante. Usando la figura seguente, determina la velocità di uscita v se l'accelerazione di gravità è $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.*



Soluzione. Per cominciare, notiamo che l'involuppo delle traiettorie dei getti d'acqua lanciati dall'origine con la stessa velocità di lancio v a diversi angoli di lancio è una parabola, come dimostrato qualche pagina fa, e il fuoco della parabola è il punto di lancio. La traiettoria parabolica di ogni singolo pacchetto d'acqua deve necessariamente toccare l'involuppo. Utilizzando l'informazione che gli angoli di lancio non sono mai stati inferiori a 45° , deduciamo che il punto di tangenza deve trovarsi a $y \geq 0$.

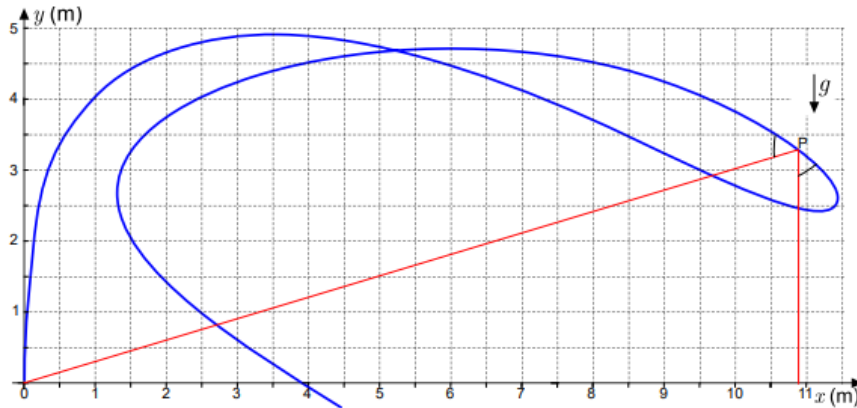
Gli elementi d'acqua vicini all'origine devono chiaramente ancora raggiungere l'involuppo, e quelli sotto il livello del suolo hanno chiaramente già superato il punto in cui lo hanno toccato. Poiché gli elementi d'acqua formano una curva continua, deve esserci almeno un punto P della curva che si trova esattamente sull'involuppo.

Possiamo usare il fatto che, per qualsiasi punto su una parabola, la somma della sua distanza dal fuoco e della sua distanza da una retta orizzontale (la direttrice) è costante. Quindi, per un punto arbitrario $Q = (x, y)$ sull'involuppo si ha $y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2H$, dove H è una costante, e per qualsiasi punto al di sotto di esso si ha $y + \sqrt{x^2 + y^2} < 2H$. Di conseguenza, tra tutti i punti appartenenti alla curva formata dall'acqua, il punto di tangenza P è quello che massimizza il valore della quantità $y + \sqrt{x^2 + y^2}$. Possiamo valutare questa espressione per una serie di punti sulla curva dell'acqua per trovare la posizione di P .

Una volta individuato il punto P , possiamo facilmente trovare l'altezza del punto più alto dell'involuppo grazie all'uguaglianza $y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2H_P$: per il punto

più alto, $x = 0$ così che la sua coordinata y rispetti l'equazione $2y = 2H_P$, da cui $y = H_P$. Il punto più alto dell'involuppo verrebbe raggiunto da un pacchetto d'acqua lanciato verticalmente, per cui l'altezza massima è legata alla velocità dalla relazione $v^2 = 2gH_P$, ottenendo

$$v = \sqrt{2gH_P}.$$



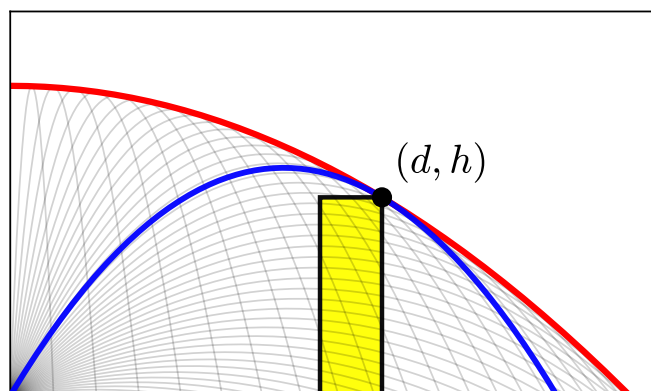
Valutando le coordinate dal grafico, possiamo trovare il valore massimo per il punto P , stimando $2H_P = (3.3 + \sqrt{10.8^2 + 3.3^2}) \text{ m} \approx 14.6 \text{ m}$, da cui si ricava infine la velocità di uscita:

$$v \approx 12 \text{ m/s}.$$

1.2 Superare un ostacolo

Consideriamo la situazione fisica in cui si vuol lanciare un oggetto puntiforme oltre un ostacolo, come, ad esempio, un muro. La domanda a cui vogliamo rispondere è: *Dato il punto di lancio e le coordinate dell'ostacolo, quanto vale la minima velocità v_0 per cui si riesce a superare l'ostacolo?*

Consideriamo la configurazione mostrata nella seguente figura, dove il punto di lancio coincide con l'origine (punto in basso a sinistra), mentre l'ostacolo è rappresentato dal rettangolo giallo.



Sfruttando il concetto di parabola di sicurezza, la velocità minima di lancio sarà quella per cui tale parabola (rossa) tocca appena il rettangolo, nel punto più lontano dall'origine. Per trovare l'equazione di tale parabola, basta imporre il passaggio per il punto (d, h)

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} d^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{g \left(h + \sqrt{h^2 + d^2} \right)}.$$

Una volta calcolata tale velocità, è possibile ricavare l'angolo di lancio ottimale. Basta usare la traiettoria generica caratterizzata dal valore di v_0 appena calcolato e imporre il passaggio per lo stesso punto (d, h)

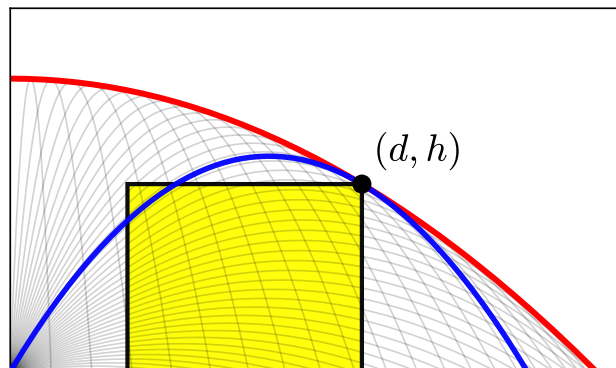
$$h = g \tan \alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = g \tan \alpha - \frac{d^2}{2 \left(h + \sqrt{h^2 + d^2} \right) \cos^2 \alpha},$$

che implica

$$\tan \alpha = \frac{h + \sqrt{h^2 + d^2}}{d},$$

che si riduce a $\alpha = \pi/4$ per $h = 0$.

Ora, può succedere che questo calcolo porti ad una traiettoria che interseca l'oggetto da un'altra parte. Se, ad esempio, l'oggetto è molto esteso come raffigurato nella figura seguente, il procedimento precedente non è più corretto.



In questo caso, si può mostrare che la traiettoria che minimizza la velocità di lancio è quella tangente ad entrambi gli spigoli superiori.

2 Termodinamica

Esempio 2.1 (Massimo e minimo rendimento). *Un gas è composto per metà da particelle monoatomiche e per metà da particelle biatomiche. Gli si fornisce calore in quantità tale da raddoppiare sia la pressione iniziale che il volume iniziale. Il processo viene rappresentato nel diagramma pressione-volume come una curva $p(V)$ monotona crescente. Determina il valore minimo e il valore massimo possibile del rapporto tra il lavoro compiuto dal gas e il calore fornito al gas.*

Soluzione. Il calore specifico molare a volume costante della miscela, essendo composta per metà da gas monoatomico e per metà da gas biatomico, è la media dei rispettivi calori specifici

$$C_V = \frac{1}{2}C_{V,\text{mono}} + \frac{1}{2}C_{V,\text{bi}} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}R\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}R\right) = 2R.$$

L'energia interna del gas può essere quindi scritta in funzione di pressione e volume usando l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$U = nC_V T = n(2R)T = 2pV.$$

La variazione di energia interna ΔU tra lo stato iniziale (V_0, p_0) e lo stato finale $(2V_0, 2p_0)$ è

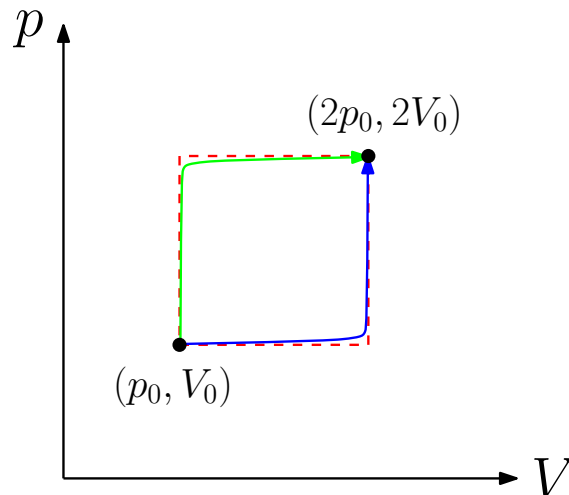
$$\Delta U = U_f - U_i = 2(2p_0)(2V_0) - 2p_0V_0 = 8p_0V_0 - 2p_0V_0 = 6p_0V_0.$$

Per il primo principio della termodinamica, il calore scambiato è $Q = \Delta U + W$. Il rapporto richiesto è

$$\frac{W}{Q} = \frac{W}{\Delta U + W} = \frac{W}{6p_0V_0 + W}.$$

Questa frazione è una funzione monotona crescente rispetto al lavoro W . Di conseguenza, per trovare i valori minimo e massimo del rapporto, è sufficiente individuare i valori minimo e massimo del lavoro W . Nel diagramma $p-V$, il lavoro è rappresentato dall'area sottesa dalla curva

$$W = \int_{V_0}^{2V_0} p(V) dV.$$



Sapendo che la funzione $p(V)$ è monotona crescente, la curva è interamente confinata all'interno del rettangolo di vertici (V_0, p_0) e $(2V_0, 2p_0)$. Il lavoro minimo possibile, limite inferiore per le curve monotone, corrisponde al percorso che prima espande a pressione costante p_0 e poi aumenta la pressione a volume costante $2V_0$

$$W_{\min} = p_0(2V_0 - V_0) = p_0V_0.$$

Il lavoro massimo possibile, limite superiore, corrisponde al percorso che prima aumenta la pressione a volume costante V_0 fino a $2p_0$ e poi espande a pressione costante

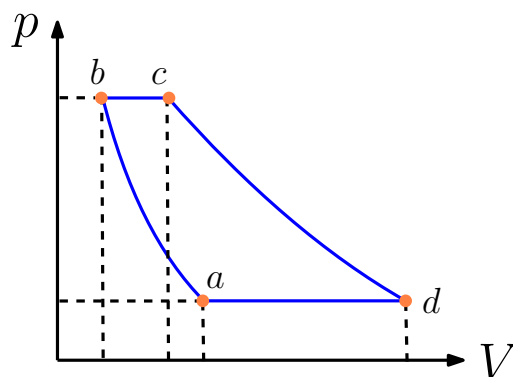
$$W_{\max} = 2p_0(2V_0 - V_0) = 2p_0V_0.$$

Sostituendo questi due valori limite nell'espressione del rapporto

$$\left(\frac{W}{Q}\right)_{\min} = \frac{p_0V_0}{6p_0V_0 + p_0V_0} = \frac{1}{7},$$

$$\left(\frac{W}{Q}\right)_{\max} = \frac{2p_0V_0}{6p_0V_0 + 2p_0V_0} = \frac{2p_0V_0}{8p_0V_0} = \frac{1}{4}.$$

Esempio 2.2 (Massimo lavoro in un ciclo reversibile, dal test di ammissione alla SNS 2022). Una mole di un gas ideale, con $\gamma = c_P/c_V$ noto, compie il ciclo $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$ schematizzato in figura nel piano $p - V$. Le trasformazioni $a \rightarrow b$ e $c \rightarrow d$ sono adiabatiche reversibili, le trasformazioni $b \rightarrow c$ e $d \rightarrow a$ sono isobare reversibili.



- Si rappresenti schematicamente il ciclo nel piano temperatura-entropia, determinando in particolare in quali punti del ciclo si raggiungono la temperatura massima T_M e quella minima T_m .
- Per valori fissati di T_M e T_m , si determini per quale valore del rapporto delle pressioni $\rho = p_b/p_a = p_c/p_d$ il lavoro fornito dal ciclo è massimo.
- Per il valore di ρ che massimizza il lavoro fornito, si determini il rendimento η del ciclo in funzione di T_M e T_m .

Soluzione. 1. Nel piano $T - S$, le trasformazioni adiabatiche reversibili $a \rightarrow b$ e $c \rightarrow d$ sono isoentropiche e vengono rappresentate da segmenti verticali. Le trasformazioni isobare $b \rightarrow c$ e $d \rightarrow a$ corrispondono invece a curve esponenziali monotone crescenti. Analizzando le variazioni di temperatura nelle singole fasi:

- (a) La compressione adiabatica $a \rightarrow b$ comporta un aumento di temperatura ($T_b > T_a$).

- (b) L'espansione isobara $b \rightarrow c$ comporta un ulteriore aumento di temperatura ($T_c > T_b$).
- (c) L'espansione adiabatica $c \rightarrow d$ comporta una diminuzione di temperatura ($T_d < T_c$).
- (d) La compressione isobara $d \rightarrow a$ comporta un'ulteriore diminuzione di temperatura ($T_a < T_d$).

Di conseguenza, procedendo lungo il ciclo, la temperatura raggiunge il suo valore massimo nel punto c ($T_M = T_c$) e il suo valore minimo nel punto a ($T_m = T_a$).

2. Il lavoro totale W fornito dal ciclo coincide con la differenza tra il calore assorbito e il calore ceduto. Poiché le adiabatiche non scambiano calore, i trasferimenti termici avvengono solo lungo le isobare:

$$Q_{\text{ass}} = c_P(T_c - T_b) = c_P(T_M - T_b),$$

$$Q_{\text{ced}} = c_P(T_d - T_a) = c_P(T_d - T_m).$$

Il lavoro è quindi dato da:

$$W = Q_{\text{ass}} - Q_{\text{ced}} = c_P(T_M - T_b - T_d + T_m).$$

Utilizziamo le equazioni delle trasformazioni adiabatiche per esprimere T_b e T_d in funzione delle incognite richieste. Per l'adiabatica $a \rightarrow b$

$$T_a p_a^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_b p_b^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \implies T_b = T_a \left(\frac{p_b}{p_a} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_m \rho^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Definiamo per praticità di calcolo la variabile $x = \rho^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, in modo da avere $T_b = T_m x$. Procedendo in modo analogo per l'adiabatica $c \rightarrow d$

$$T_c p_c^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_d p_d^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \implies T_d = T_c \left(\frac{p_d}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_M \left(\frac{1}{\rho} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{T_M}{x}.$$

Sostituendo queste due espressioni nell'equazione del lavoro, otteniamo una funzione dipendente solo da x

$$W(x) = c_P \left(T_M - T_m x - \frac{T_M}{x} + T_m \right).$$

Per trovare il valore che massimizza il lavoro, deriviamo la funzione rispetto a x e imponiamo che la derivata si annulli

$$\frac{dW}{dx} = c_P \left(-T_m + \frac{T_M}{x^2} \right) = 0 \implies x = \sqrt{\frac{T_M}{T_m}}.$$

Risostituendo la definizione iniziale di x , ricaviamo il rapporto delle pressioni ottimale

$$\rho^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{T_M}{T_m} \right)^{\frac{1}{2}} \implies \rho = \left(\frac{T_M}{T_m} \right)^{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}}.$$

3. Il rendimento termodinamico del ciclo η è definito come il rapporto tra il lavoro prodotto e il calore assorbito:

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{ass}}} = 1 - \frac{Q_{\text{ced}}}{Q_{\text{ass}}} = 1 - \frac{T_d - T_m}{T_M - T_b}.$$

Esprimendolo in funzione della variabile di comodo x

$$\eta = 1 - \frac{\frac{T_M}{x} - T_m}{T_M - T_m x} = 1 - \frac{\frac{T_M - T_m x}{x}}{T_M - T_m x} = 1 - \frac{1}{x}.$$

Sostituendo infine il valore di x precedentemente ricavato che garantisce il lavoro massimo, otteniamo il rendimento corrispondente

$$\eta = 1 - \sqrt{\frac{T_m}{T_M}}.$$

3 Altro

Esempio 3.1 (Corsa sul ghiaccio, NBPhO 2014). *Un ragazzo sta correndo su un grande campo di ghiaccio con velocità $v = 5 \text{ m/s}$ verso nord. Il coefficiente di attrito tra i suoi piedi e il ghiaccio è $\mu = 0.1$. Si assuma per semplicità che la forza di reazione tra il ragazzo e il ghiaccio rimanga costante.*

1. Qual è il tempo minimo necessario affinché cambi la sua direzione di moto per puntare verso est in modo che la velocità finale abbia lo stesso modulo di quella iniziale?
2. Che forma ha la traiettoria ottimale?

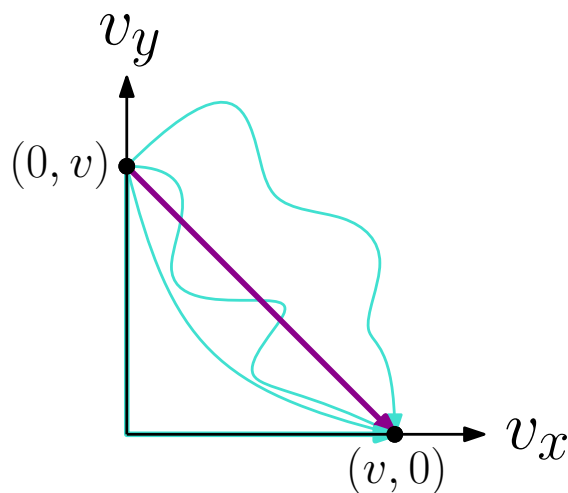


Figura 1: Possibili percorsi per il cambio di velocità sul piano $v_x - v_y$. Il percorso rettilineo in viola corrisponde al tempo minimo.

Soluzione. Durante il processo, il vettore velocità deve cambiare la sua direzione di 90° . Consideriamo la situazione graficamente usando il piano $v_x - v_y$: dobbiamo muoverci dal punto A di coordinate $(0, v)$ a un punto B di coordinate $(v, 0)$ mantenendo una “velocità” costante. Infatti, la velocità di un punto nel piano $v_x - v_y$

corrisponde all'accelerazione del corpo, che in questo caso ha modulo costante pari a μg . Ovviamente, il percorso più rapido è una linea retta di lunghezza $v\sqrt{2}$, per cui si ottiene:

$$t = \frac{v\sqrt{2}}{\mu g} \approx 7.2 \text{ s.}$$

Poiché la direzione dell'accelerazione è costante, la traiettoria è la stessa di un corpo nel campo gravitazionale terrestre: una parabola.

Esempio 3.2 (Fionda gravitazionale, dal test di ammissione allo Stage di Fisica SNS 2025). *Consideriamo un pianeta di massa M e raggio R , posto molto lontano da ogni altro corpo celeste. Il pianeta non ruota in un sistema di riferimento inerziale.*

1. *Un oggetto di massa $m_a \ll M$ si trova inizialmente sulla sua superficie. Quale deve essere, come minimo, il modulo della sua velocità iniziale v_0 affinché esso riesca ad allontanarsi indefinitamente dal pianeta?*
2. *Aggiungiamo alla configurazione precedente un satellite di massa $m \ll M$ e dimensioni trascurabili, che orbita attorno al pianeta su un'orbita circolare di raggio $d > R$. Grazie alla presenza del satellite, è possibile ridurre la minima velocità che è necessario imprimere all'oggetto affinché esso riesca ad allontanarsi indefinitamente dal pianeta: questa tecnica, nota come “effetto fionda”, sfrutta l'interazione tra il satellite e l'oggetto, schematizzabile come un urto elastico. Assumendo che $m_a \ll m$, determinare qual è il minimo modulo della velocità v_1 necessario in questo caso.*

Nota: le velocità iniziali si intendono sempre riferite a un sistema di riferimento inerziale solidale al pianeta.

Soluzione. 1. La velocità cercata si trova ponendo uguale a zero l'energia meccanica totale dell'oggetto,

$$\frac{1}{2}m_av_0^2 - \frac{GMm_a}{R} = 0,$$

da cui $v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$. Infatti, a distanza infinita dal pianeta l'energia gravitazionale dell'oggetto si annulla, perciò, essendo l'energia cinetica non negativa, anche l'energia totale deve esserlo. Questa velocità è detta “velocità di fuga”, o “seconda velocità cosmica”.

2. Immaginiamo che l'oggetto, raggiunta la quota dell'orbita del satellite, abbia velocità nulla quando subisce l'effetto fionda. Ammettendo che il satellite abbia raggio nullo, la fionda gravitazionale si può interpretare molto semplicemente come un urto elastico tra il satellite e l'oggetto. Il satellite ha inizialmente velocità $v = \sqrt{\frac{GM}{d}}$ (detta “prima velocità cosmica”). Se ci poniamo nel sistema di riferimento solidale a esso (trascuriamo gli effetti dovuti al fatto che non è un sistema inerziale), allora l'astronave si avvicinerà al satellite con una velocità di modulo uguale. Detta v'_a la velocità dell'oggetto dopo l'urto e v'_s quella del satellite, dalle equazioni della conservazione dell'energia e della quantità di moto risulta, nel caso ottimale di urto frontale,

$$m_av = m_av'_a + mv'_s, \quad \frac{m_av^2}{2} = \frac{m_av'^2_a}{2} + \frac{mv'^2_s}{2},$$

$$\Rightarrow v'_a = \frac{m_a - m}{m_a + m}v \approx -v,$$

Mentre quella del satellite rimane pressoché costante:

$$v'_s = \frac{2m_a}{m + m_a}v \approx 0.$$

Questo fa sì che l'oggetto acquisti grande quantità di moto e si muova ora rispetto al pianeta con una velocità pari al doppio della prima velocità cosmica v a quella distanza dal pianeta. Essa ha quindi una velocità maggiore della velocità di fuga calcolata alla distanza d dal pianeta, che vale $\sqrt{2}v$. Questo consente all'astronave di fuggire dalla gravità del pianeta con la sola velocità necessaria per raggiungere la quota del satellite senza velocità residua. Dalla conservazione dell'energia si ha quindi

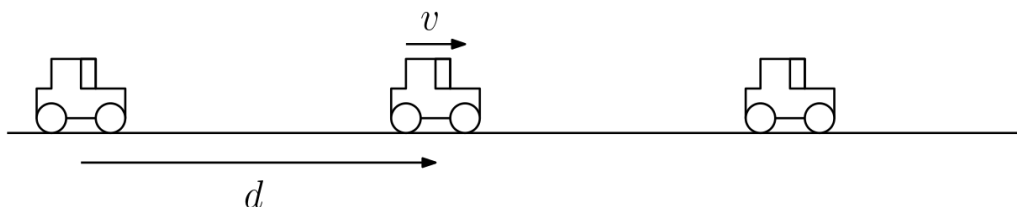
$$\frac{1}{2}m_av_1^2 - \frac{GMm_a}{R} = -\frac{GMm_a}{d},$$

perciò si trova

$$v_1 = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d} \right)}.$$

Si noti che questa velocità è ottimale perché, per velocità iniziali inferiori, l'oggetto non raggiungerebbe la quota del satellite e non potrebbe dunque sfruttare l'effetto fionda.

Esempio 3.3 (Stima della portata massima di una strada, concorso di ammissione alla SNS 2022). *Stima la portata massima (in numero di autoveicoli per ora) di una strada a singola corsia, imponendo le opportune condizioni di sicurezza.*



Soluzione. La portata di una strada non è altro che il numero di automobili che passano per uno stesso punto nell'unità di tempo. Per semplicità, considereremo automobili tutte uguali che viaggiano alla stessa velocità di crociera v . Quante automobili sono presenti in un tratto di strada lungo L ?

$$n = \frac{L}{d},$$

dove d è la distanza tra due automobili consecutive. Se non ci fossero condizioni di sicurezza da seguire, d coinciderebbe con la lunghezza di una singola automobile (sarebbero tutte attaccate in fila indiana). Quanto dovrebbe valere d in una nazione civile? Ha senso che essa sia una funzione crescente della velocità v : maggiore è la velocità, maggiore è la distanza di sicurezza. Possiamo stimare la distanza di sicurezza come la somma di due contributi

$$d_{\text{sicurezza}} = d_{\text{reazione}} + d_{\text{frenata}} = vt_{\text{reazione}} + \frac{v^2}{2\mu g},$$

dove d_{reazione} è la distanza percorsa dalla macchina durante il tempo di reazione umano, mentre d_{frenata} è la distanza percorsa durante la frenata. Quest'ultima è stata calcolata considerando la frenata come un moto rettilineo uniformemente decelerato, causato dalla forza di attrito $F = \mu mg$. A questo punto, possiamo dire che la distanza d tra due auto è la somma della distanza di sicurezza $d_{\text{sicurezza}}$ e la lunghezza di una singola auto l_{auto} . La portata, cioè il numero di auto al secondo, è

$$p(v) = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{\rho(v)v\Delta t}{\Delta t} = \frac{n(v)}{L} v = \frac{v}{l_{\text{auto}} + vt_{\text{reazione}} + \frac{v^2}{2\mu g}},$$

dove con $\rho(v)$ abbiamo indicato la densità di auto, cioè il numero di auto per unità di lunghezza. Massimizziamo questa funzione rispetto alla variabile v , uguagliando a zero la sua derivata prima. Dopo aver controllato il segno della derivata seconda, ci accorgiamo che si ha un massimo per $v^* = \sqrt{2\mu gl_{\text{auto}}}$. Quindi

$$p_{\text{max}} = \frac{\sqrt{2\mu gl_{\text{auto}}}}{l_{\text{auto}} + t_{\text{reazione}}\sqrt{2\mu gl_{\text{auto}}} + \frac{2\mu gl_{\text{auto}}}{2\mu g}} = \frac{1}{t_{\text{reazione}} + \sqrt{\frac{2l_{\text{auto}}}{\mu g}}}.$$

Le stime per μ , l_{auto} e t_{reazione} sono alla portata di tutti. Prendiamo dei valori sensati, tipo $\mu \approx 0.8$, $l_{\text{auto}} \approx 4$ m e $t_{\text{reazione}} \approx 0.3$ s. Otteniamo $p_{\text{max}} \approx 0.8$ auto al secondo, quindi circa 3000 auto all'ora.
