

Problem Solving

Daniele Battesimo Provenzano*

Indice

1	Il diagramma di corpo libero	1
1.1	Aspetti salienti	1
1.2	Esempi	8
2	Problemi a Caso	11

1 Il diagramma di corpo libero

In cosa consiste? Disegnare tutte le forze agenti su un corpo (o punto materiale) per poi scrivere le equazioni del moto che determinano l'evoluzione dello stato di moto o di quiete del corpo. Come si può capire dall'affermazione precedente, il diagramma di corpo libero cammina in coppia con il secondo principio della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$, il quale viene affiancato dal principio di azione e reazione¹. Quanti diagrammi di corpo libero vanno fatti in ogni problema? Uno per ogni corpo!

Importante: il diagramma di corpo libero non si usa solo in problemi di pura meccanica! Se sul corpo agiscono forze elettriche, magnetiche, fluidodinamiche... possiamo comunque applicarlo. Grazie ad esso possiamo scrivere e risolvere le prime due equazioni cardinali per le forze e i momenti ad esse associate. Quando ha senso fare ciò? Quando il corpo in esame è un punto, un solido o è approssimabile ad un solido più o meno rigido!

Nella prossima sezione riportiamo caratteristiche, regole e accorgimenti legati a questa tecnica.

1.1 Aspetti salienti

- **Forza normale tra due corpi a contatto.** La forza di contatto tra due corpi rigidi è detta *normale*. La normale è sempre diretta perpendicolarmente alla superficie di contatto tra due corpi. Se la superficie è curva, la normale giace localmente lungo la retta ortogonale al piano tangente alla superficie e passante per il punto di contatto. Quale verso prendiamo? La regola è: *il verso della forza normale che agisce su un determinato corpo è quello entrante nel corpo stesso*. Capiamolo tramite il seguente esempio.

*daniele.provenzano@sns.it oppure daniele.battesimo.provenzano@gmail.com

¹In meccanica classica, il principio di azione e reazione vale sempre. Nel contesto della relatività speciale, invece, fa i capricci. Ad esempio, le forze che si generano tra due cariche in moto relativo tra di loro non lo rispettano. Più generalmente, è la forza di Lorentz che non obbedisce al terzo principio. Però, se ci teniamo a distanza da questi effetti, possiamo stare tranquilli.

Esempio 1.1 (Due corpi appoggiati sul pavimento). Consideriamo due blocchi uno sopra l'altro, poggiati su un piano come in Fig. 1.

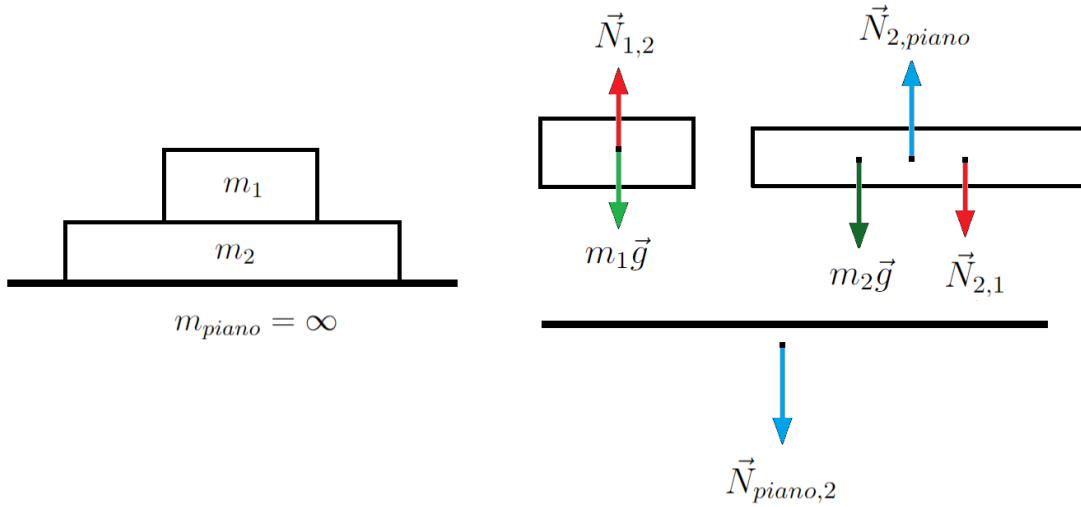


Figura 1: Diagrammi di corpo libero dei due blocchi. Ogni quantità del tipo $\vec{N}_{a,b}$ rappresenta una forza normale e va interpretata come la “forza normale agente sul corpo a e dovuta al contatto col corpo b ”.

A destra sono riportati i diagrammi di corpo rigido relativi ai due blocchi. Prendiamo in esame, ad esempio, le due frecce rosse. Loro rappresentano la forza normale che si genera a causa del contatto tra i due blocchi. Per il blocco che sta sopra, la forza normale $\vec{N}_{1,2}$ è rivolta verso l'alto perché, secondo la regola generale, è diretta dalla superficie di contatto verso l'interno del corpo. Invece, per il blocco inferiore, la normale è rivolta verso il basso sempre per la stessa regola (dalla superficie di contatto verso l'interno del corpo). La stessa cosa vale per le normali blu, le quali si generano a causa del contatto tra il blocco inferiore e il piano. Poi, a causa del principio di azione e reazione, possiamo affermare che

$$\vec{N}_{1,2} = -\vec{N}_{2,1}$$

e

$$\vec{N}_{\text{piano},2} = -\vec{N}_{2,\text{piano}}.$$

Scriviamo il secondo principio della dinamica usando i diagrammi di corpo libero e scegliendo l'asse y che punta verso l'alto:

$$\begin{cases} m_1 a_1^x = 0, \\ m_1 a_1^y = N_{1,2} - m_1 g, \\ m_2 a_2^x = 0, \\ m_2 a_2^y = N_{2,\text{piano}} - N_{2,1} - m_2 g. \end{cases}$$

I corpi sono appoggiati sul piano, quindi sono immobili. Segue che tutte le accelerazioni sono nulle (non solo le componenti lungo il piano). Ricordando che, per il principio di azione e reazione $N_{1,2} \equiv |\vec{N}_{1,2}| = |-\vec{N}_{2,1}| \equiv N_{2,1}$ il sistema precedente diventa

$$\begin{cases} N_{1,2} - m_1 g = 0, \\ N_{2,\text{piano}} - N_{1,2} - m_2 g = 0, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $N_{1,2} = m_1g$ e $N_{2,\text{piano}} = (m_1 + m_2)g$. Ora conosciamo tutto sul sistema! Quindi, una bilancia posta tra i due blocchi segna il peso di quello superiore, mentre un'altra posta tra il blocco inferiore e il piano segna la somma dei pesi dei due blocchi.

- **Tensioni di funi inestensibili e senza massa.** Ecco due regole da seguire quando si ha a che fare con fili, cavi e funi inestensibili e con massa trascurabile.
 - Regola 1: la tensione punta sempre verso l'interno della fune.
 - Regola 2: la tensione ha lo stesso valore/modulo in ogni punto della fune².

Vediamo come applicare queste regole con il seguente esempio.

Esempio 1.2 (Due corpi appesi al soffitto). Facciamo riferimento al sistema schematizzato in Fig. 2 (leggete bene la descrizione della figura).

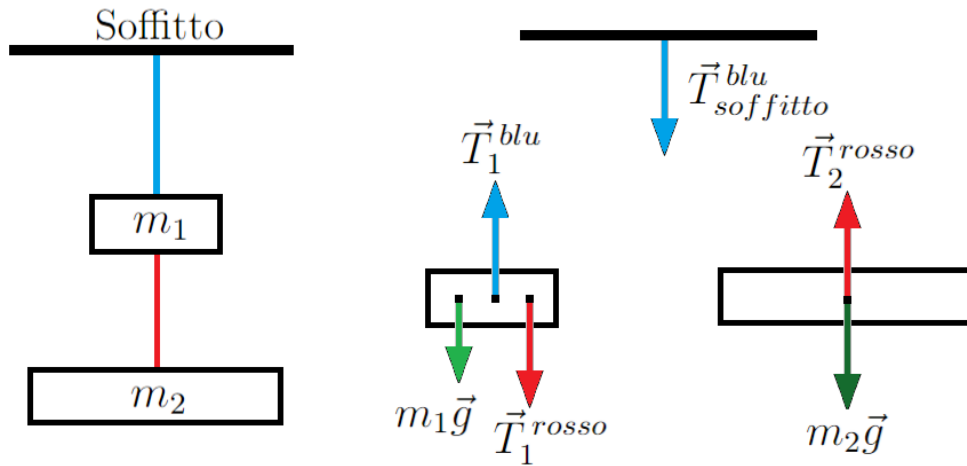


Figura 2: Schematizzazione del sistema in esame: due blocchi appesi al soffitto tramite due fili inestensibili e senza massa, uno rosso e uno blu. Ogni quantità del tipo $\vec{T}_{\text{numero}}^{\text{colore}}$ rappresenta una delle tensioni e va interpretata come la “tensione agente sul corpo *numero* e dovuta al filo *colore*”. La direzione delle frecce rosse e blu è stata scelta seguendo la Regola 1.

Scegliendo l’asse y che punta verso l’alto, scriviamo il secondo principio della dinamica per entrambi i blocchi³:

$$\begin{cases} m_1 a_1^x = 0, \\ m_1 a_1^y = |\vec{T}_1^{\text{blu}}| - m_1 g - |\vec{T}_1^{\text{rosso}}|, \\ m_2 a_2^x = 0, \\ m_2 a_2^y = |\vec{T}_2^{\text{rosso}}| - m_2 g. \end{cases}$$

Invochiamo la regola 2: i moduli delle tensioni relative allo stesso filo sono uguali. In altre parole,

$$|\vec{T}_1^{\text{blu}}| = |\vec{T}_{\text{soffitto}}^{\text{blu}}| \equiv T_{\text{blu}}$$

²Questa proprietà non vale per le funi massive.

³Riportiamo per completezza anche la componente lungo l’asse x , ma dal prossimo esempio in poi non scriveremo più le equazioni per le componenti banali. Sarebbe solo una perdita di tempo.

e

$$\left| \vec{T}_1^{\text{rosso}} \right| = \left| \vec{T}_2^{\text{rosso}} \right| \equiv T_{\text{rosso}}.$$

A questo punto, le equazioni utili del sistema diventano

$$\begin{cases} m_1 a_1^y = T_{\text{blu}} - m_1 g - T_{\text{rosso}}, \\ m_2 a_2^y = T_{\text{rosso}} - m_2 g. \end{cases}$$

I due blocchi sono immobili, quindi la loro accelerazione è nulla. Segue che $T_{\text{rosso}} = m_2 g$ e $T_{\text{blu}} = (m_1 + m_2)g$. Ora conosciamo tutto sul sistema!

La notazione che abbiamo usato fino ad ora è leggermente pesante, ma è stata scelta per uno scopo puramente didattico e chiarificatorio. Da ora in poi lasceremo molti indici/pedici a casa, anche perché in gara bisogna perdere meno tempo possibile!

- **Forze di attrito.**⁴ In Meccanica Classica (quindi solo per quanto riguarda i corpi solidi e i punti materiali), per *forza di attrito* si intende una forza che si genera tra due corpi in contatto e che rispetta le tre leggi di Amontons.

1. *La forza di attrito è direttamente proporzionale alla normale che si genera tra i due corpi.* La costante di proporzionalità è il coefficiente di attrito statico, nel caso in cui la velocità relativa tra i due corpi sia nulla, o il coefficiente di attrito dinamico, nel caso di velocità relativa non nulla.
2. *La forza di attrito è indipendente dall'area della superficie di contatto tra i due corpi.* Su questa legge ci sarebbe tanto da dire. Nella realtà, per quanto possa sembrare liscia, ogni superficie risulta frastagliata. Quindi, premendo con più forza non solo facciamo aumentare la forza normale tra i due corpi, ma aumenta anche il coefficiente di attrito perché la *superficie di contatto efficace* aumenta! Fortunatamente, le superfici dei corpi che modellizziamo in fisica sono perfettamente piatte, quindi questa seconda legge deve sempre essere rispettata. In altre parole, la forza di attrito agente su un parallelepipedo omogeneo di lati a , b e c è indipendente da quale delle sei facce è appoggiata al pavimento!
3. *La forza di attrito (dinamica) è indipendente dalla velocità relativa con cui i due corpi scivolano uno sull'altro o accanto all'altro.* In altre parole, questa legge ci dice che il coefficiente di attrito dinamico non dipende dalla velocità relativa dei corpi in contatto. Esso è, a tutti gli effetti, una costante che dipende solo dalla natura dei materiali che costituiscono i due corpi.

Ci resta da capire come è diretta: la forza di attrito si oppone al movimento. Nel caso dinamico è facile, perché basta prendere il verso opposto a quello della velocità. Nel caso statico, invece, basta prendere la direzione opposta a quella verso cui il corpo vorrebbe andare. Ad esempio, un corpo appoggiato su un piano inclinato vorrebbe accelerare verso il fondo del piano, quindi la forza di attrito statico è diretta verso la cima del piano inclinato. Se, invece, il corpo è fermo su un piano orizzontale? Beh, in questo caso la direzione della forza di attrito non è ben definita. Il corpo né si muove né vorrebbe muoversi lungo il piano, quindi, non ha senso parlare della direzione della forza di attrito. Ha senso farlo solo se si introducono altre forze, possibilmente con qualche componente rivolta parallelamente al piano orizzontale.

⁴In questa lezione tratteremo solo casi in cui i corpi strisciano uno sull'altro o uno accanto all'altro, tralasciando i casi di rotolamento. Nel caso di corpi che rotolano e non strisciano sulle superfici, ci sarebbe molto altro da dire sulla forza di attrito. Lasciamo questa discussione ad una lezione futura.

Esempio 1.3 (Discesa lungo un piano inclinato scabro). Consideriamo un piano inclinato con angolo di inclinazione θ , sul quale sta scivolando un corpo di massa m . Il coefficiente di attrito tra corpo e piano è μ . Quanto vale l'accelerazione del corpo?

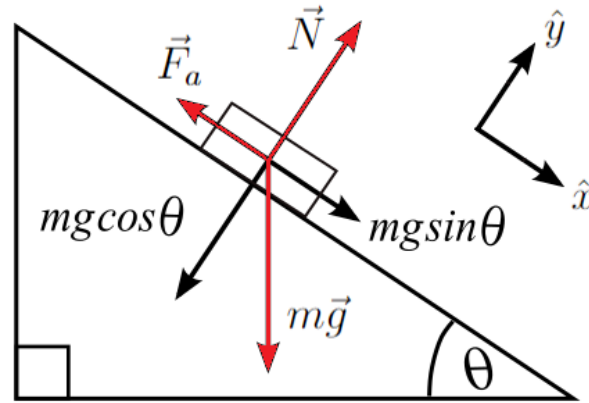


Figura 3: Diagramma di corpo libero relativo al blocco in discesa.

Riportiamo il diagramma di corpo libero in Fig. 3. Le frecce rosse rappresentano le forze agenti sul blocco, mentre le due nere sono le componenti della forza peso lungo gli assi del sistema di coordinate xy .

Un momento: in questo caso i corpi sono due (blocco e piano inclinato), quindi non dovremo fare due diagrammi di corpo libero? Effettivamente sì, ma il piano inclinato è fissato al terreno ed è come se fosse un'estensione dello stesso. In altre parole, l'accelerazione a cui è soggetto è sempre nulla perché è come se avesse massa infinita, quindi non ha senso scrivere l'equazione del moto $\vec{a} = \vec{F}/M_{\text{piano}} = \vec{F}/\infty = 0$. Limitiamoci, quindi, al diagramma di corpo libero del blocco e alle sue equazioni del moto. Scomponiamo l'equazione $\vec{F} = m\vec{a}$ lungo gli assi x e y :

$$\begin{cases} ma_x = mg \sin \theta - F_a = mg \sin \theta - \mu N, \\ ma_y = N - mg \cos \theta. \end{cases}$$

Notate che nella prima equazione abbiamo usato la prima legge sull'attrito $F_a = \mu N$. Il piano inclinato rappresenta un vincolo per il moto del blocco: esso non può penetrarci all'interno. Inoltre, non può prendere il volo se l'unica forza esterna al sistema è la forza gravitazionale. In altre parole, $a_y = 0$. Quindi il modulo della forza normale è $N = mg \cos \theta$. A questo punto, la prima equazione porge $a_x = g(\sin \theta - \mu \cos \theta)$. Ora conosciamo tutto del sistema!

- **Forza centripeta.** Questo è un argomento che genera molta confusione. Che differenza c'è tra forza centripeta e centrifuga? Diciamo che sono entrambe legate alla stessa situazione fisica, cioè compaiono quando c'è qualcosa che ruota o che, più genericamente, si muove lungo una traiettoria non rettilinea (come i carrelli sulle montagne russe, i pianeti attorno al Sole o i veicoli in curva). Le due forze sono due facce diverse della stessa medaglia: esse si generano a causa della deviazione dalla traiettoria rettilinea, ma, mentre la centrifuga è la forza avvertita dal corpo in moto, la centripeta è la risultante delle forze che consentono al corpo di deviare dalla traiettoria rettilinea. In pratica, sono l'una l'alter ego dell'altra, in due sistemi

di riferimento diversi.

La forza centripeta necessaria a far muovere un corpo di massa m lungo una circonferenza di raggio R alla velocità v vale, in modulo,

$$f_c = m \frac{v^2}{R}.$$

Cosa succede se il corpo si muove lungo una generica traiettoria non rettilinea? Quanto vale la forza centripeta punto per punto? Se la curva è piana e abbastanza regolare, ad ogni suo punto P può essere associato un raggio di curvatura⁵ $r_c(P)$. A questo punto, la forza centripeta nel punto P vale

$$f_c(P) = m \frac{v^2(P)}{r_c(P)}.$$

Potete verificare che nel caso della circonferenza il raggio di curvatura è proprio pari al raggio della stessa, mentre nel caso di una retta il raggio di curvatura è infinito. Quest'ultimo risultato ci torna? La retta è l'unica traiettoria che non ha bisogno di una forza centripeta per essere percorsa. Infatti, se la velocità non diverge, per una retta $r_c \rightarrow \infty$ implica che

$$f_c(P) = m \frac{v^2}{r_c} = 0.$$

Tornando al moto circolare e volendo essere più precisi, dobbiamo dire che *se un corpo si muove lungo una circonferenza, la componente radiale della risultante delle forze agenti su di esso è centripeta*. Facciamo alcuni esempi per capire meglio la natura di queste forze.

Esempio 1.4 (Palla legata ad un filo). Consideriamo una palla di massa m attaccata ad un filo inestensibile di lunghezza l e massa trascurabile. Mettiamo in rotazione il filo tenendolo per l'estremità libera e dimentichiamoci degli effetti dovuti alla forza peso. La palla compie un moto circolare uniforme con una certa velocità v , lungo una circonferenza di raggio l . La palla sente una forza che cerca di spingerla al di fuori della circonferenza, in direzione radiale. Questa è la forza *centrifuga*! Ricordiamoci che è quella percepita dal corpo che si muove. Invece noi cosa vediamo? Noi vediamo la palla muoversi lungo una traiettoria circolare, quindi *deduciamo che deve esistere una forza che consente alla palla di deviare dalla traiettoria rettilinea*. Questa forza è chiamata forza *centripeta*! Nel nostro caso, il ruolo di forza centripeta è assunto dalla tensione del filo. Infatti, istantaneamente vale che

$$T = m \frac{v^2}{l}.$$

Quella che abbiamo appena scritto è la trasposizione in formule della frase citata in precedenza: se un corpo si muove lungo una circonferenza, la componente radiale della risultante delle forze agenti su di esso (in questo caso la risultante è la tensione del filo T , che è interamente radiale) è centripeta ($= m \frac{v^2}{l}$).

⁵Sia data una curva piana descritta dalla funzione $y(x)$ derivabile due volte. In coordinate cartesiane, il raggio di curvatura vale

$$r_c(x) = \frac{(1 + y'^2(x))^{3/2}}{|y''(x)|}.$$

Potremmo ripetere lo stesso ragionamento nel caso di una persona su una giostra rotante: in questo caso, è la reazione normale dello schienale del sedile della giostra a comportarsi da forza centripeta.

Esempio 1.5 (Veicolo in curva). Consideriamo un'automobile di massa m che si muove lungo una strada curva, il cui raggio di curvatura varia in base alla posizione e vale $r_c(x)$, dove x è la posizione lungo la strada. Sia $v(x)$ il modulo della velocità dell'automobile. Come nell'esempio precedente, l'auto (e, quindi, le persone al suo interno) sente una forza che tende a spingerla fuori dalla strada. Un osservatore sul marciapiede, invece, vede la macchina muoversi lungo un tratto curvo. Quindi, lui deduce che deve esistere una forza che permette al corpo di seguire tale traiettoria non rettilinea. In questo caso, è la forza di attrito tra la strada e le ruote che si comporta da forza centripeta

$$f_a = m \frac{v^2(x)}{r_c(x)}.$$

La forza di attrito è la forza risultante che agisce sulla macchina perché la forza peso viene controbilanciata dalla reazione normale della strada. Ricordando che il massimo valore della forza di attrito è μmg , nel caso in cui, per qualche x , si avesse $\frac{v^2(x)}{r_c(x)} \geq \mu g$, l'auto perderebbe contatto con l'asfalto e inizierebbe a slittare, non seguendo più la curva!

Esempio 1.6 (Discesa lungo una semisfera). *Un corpo di massa m è lasciato libero di cadere dalla cima di una semisfera fissata al terreno, il cui raggio è R . Tra il corpo e la superficie della semisfera non c'è attrito. A quale altezza il corpo si distacca dalla semisfera?*

Scriviamo le equazioni del moto lungo le direzioni tangente e perpendicolare alla superficie della semisfera.

$$\begin{cases} ma_p = N - mg \cos \theta, \\ ma_t = mg \sin \theta, \end{cases}$$

dove θ è l'angolo tra la verticale e la retta che passa per il centro della semisfera e la posizione istantanea del corpo. **Esso si stacca dalla semisfera non appena la forza normale N si annulla.** Ricordando che la risultante delle forze deve essere centripeta, per come abbiamo scelto gli assi possiamo imporre che $ma_p = -m \frac{v^2}{R}$, quindi

$$N = -m \frac{v^2(\theta)}{R} + mg \cos \theta.$$

Dalla conservazione dell'energia meccanica, segue che

$$v(\theta) = \sqrt{2gR(1 - \cos \theta)},$$

quindi otteniamo

$$N = mg(3 \cos \theta - 2).$$

La reazione normale si annulla per $\cos \theta_0 = \frac{2}{3}$, quindi l'altezza a cui avviene il distacco è

$$h_0 = R \cos \theta_0 = \frac{2R}{3}.$$

1.2 Esempi

Per familiarizzare con questa tecnica, vediamo altri esempi.

Esempio 1.7 (Macchina di Atwood). Consideriamo la macchina di Atwood schematizzata in Fig. 4. Quanto vale l'accelerazione con cui il sistema formato dai due corpi evolve?

Orientando l'asse y verso l'alto, le equazioni del moto si leggono

$$\begin{cases} m_1 a_1 = T - m_1 g, \\ m_2 a_2 = T - m_2 g, \end{cases}$$

a cui va aggiunta la condizione di inestensibilità $a_1 = -a_2$. La soluzione è $a_1 = -a_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$.

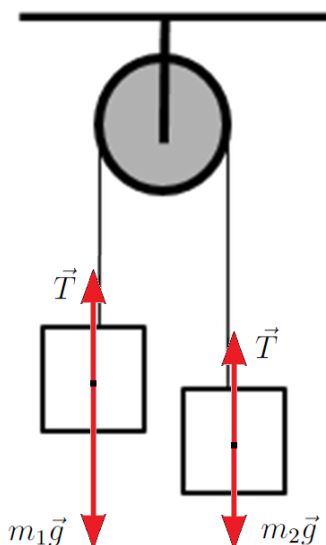


Figura 4: Schematizzazione di una macchina di Atwood.

Esempio 1.8 (Trenino di blocchi). Tre scatole sono spinte lungo una superficie liscia orizzontale con una forza $\vec{F}$ parallela alla superficie stessa, come mostrato in Fig. 5. Qual è l'intensità della forza che la scatola centrale esercita sulla scatola di sinistra?

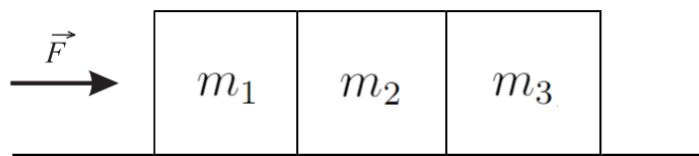


Figura 5: Schematizzazione del sistema dell'Esempio 1.8.

Applicando la seconda legge della dinamica al sistema formato dalle tre scatole si ricava l'accelerazione del sistema

$$F = (m_1 + m_2 + m_3)a \implies a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Indichiamo con F_{21} la forza che la scatola centrale esercita su quella di sinistra. Costruiamo (mentalmente) il diagramma di corpo libero per la scatola di sinistra e applichiamo la seconda legge della dinamica su di essa:

$$F - F_{21} = m_1 a \implies F_{21} = F - m_1 a = (m_2 + m_3)a.$$

Sostituendo l'espressione per l'accelerazione delle scatole, il risultato è

$$F_{2,1} = \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} F,$$

che, per il principio di azione e reazione è anche il modulo della forza che la prima scatola esercita sulla seconda. Allo stesso risultato si giunge considerando che la prima scatola spinge le altre due con una forza di intensità $(m_2 + m_3)a$ e, per il principio di azione e reazione, questa è anche l'intensità della forza che riceve dalle altre due.

Queste forze tra le scatole sono a tutti gli effetti delle forze normali, perché sono forze di contatto tra corpi solidi! Avremmo potuto indicarle con la lettera N !

Spesso, nei problemi dinamici, le incognite da trovare sono di più delle equazioni del moto che abbiamo a disposizione. Per risolvere il sistema serve trovare delle condizioni geometriche che impongono dei vincoli al moto, come la condizione di inestensibilità usata nell'esempio della macchina di Atwood. Vediamo un altro esempio.

Esempio 1.9 (Discesa lungo un piano inclinato mobile). *Un blocco di massa m si trova fermo su un piano inclinato di massa M , il quale è libero di muoversi sul pavimento. Sia θ l'angolo alla base del piano inclinato, raffigurato in Fig. 6. Nel sistema non è presente alcuna forma di attrito. Quanto vale l'accelerazione del piano nel momento in cui il blocco viene rilasciato?*

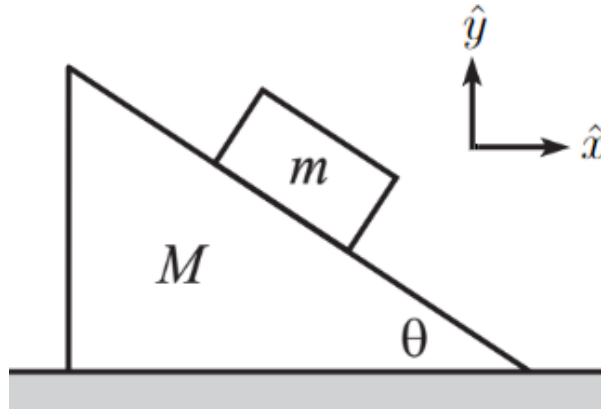


Figura 6: Blocco appoggiato su un piano inclinato libero di muoversi sul piano orizzontale.

Sia N il modulo della forza normale tra il blocco e il piano. Se il piano inclinato fosse fissato al terreno si avrebbe $N = mg \cos \theta$, ma non è questo il caso. Grazie ai diagrammi di corpo libero del blocco e del piano inclinato, possiamo scrivere che

$$ma_x = N \sin \theta, \quad (1)$$

$$ma_y = N \cos \theta - mg, \quad (2)$$

$$MA_x = -N \sin \theta. \quad (3)$$

Notiamo che la (1) e la (3) implicano la conservazione della quantità di moto del sistema lungo il piano orizzontale:

$$\frac{dp}{dt} = ma_x + MA_x = 0.$$

Invece, la quantità di moto lungo la direzione verticale non si conserva a causa dell'azione della forza di gravità sul blocco. Di fatto, il centro di massa del sistema si abbassa continuamente!

Abbiamo 3 equazioni e 4 incognite (a_x , a_y , A_x , N), quindi ci serve un'ultima equazione. Essa viene fuori dalla condizione di contatto tra il blocco e il piano: la distanza orizzontale tra la posizione istantanea del blocco e il suo punto di partenza è $\Delta x = \frac{1}{2}(a_x - A_x)t^2$, mentre la distanza verticale è $\Delta y = \frac{1}{2}a_y t^2$. Per far sì che il blocco rimanga appoggiato sul piano, il rapporto di queste distanze deve essere uguale a $\tan \theta$ (cambiato di segno) istante per istante. Pertanto, dobbiamo avere

$$\tan \theta = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{a_y}{a_x - A_x}.$$

A questo punto possiamo risolvere il sistema per a_x , a_y e A_x e sostituire nell'equazione precedente, la quale restituisce

$$-\frac{\frac{N}{m} \cos \theta - g}{\frac{N}{m} \sin \theta + \frac{N}{M} \sin \theta} = \tan \theta \implies N = \frac{g}{\frac{M+m}{Mm} \sin \theta \tan \theta + \frac{\cos \theta}{m}}.$$

A questo punto, sostituendo nella (3) otteniamo

$$A_x = -\frac{N \sin \theta}{M} = -\frac{mg \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta}.$$

Esempio 1.10 (Rotolino di carta igienica in the corner). *Un cilindro cavo di raggio 2 cm sta inizialmente ruotando attorno al suo asse con una velocità angolare di 70 rad/s. Esso viene delicatamente posizionato e rilasciato in un angolo tra il pavimento ed il muro, come mostrato in Fig. 7. Se il coefficiente di attrito tra il cilindro ed ognuna delle due superfici è pari a 0.4, dopo quanto tempo la rotazione cesserà?*

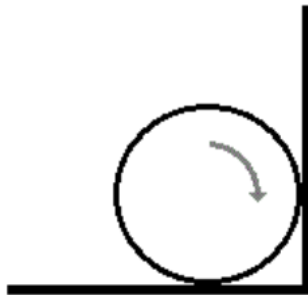


Figura 7: Schematizzazione del rotolo rotante.

Siano N_1 e F_1 i moduli della reazione normale e della forza d'attrito con il pavimento, e N_2 e F_2 le stesse quantità relative al muro. Poiché in entrambi i casi l'attrito è dinamico, abbiamo $F_1 = \mu N_1$ e $F_2 = \mu N_2$. L'equilibrio delle forze lungo le direzioni verticale e orizzontale impone

$$\begin{cases} -mg + N_1 + \mu N_2 = 0 \\ \mu N_1 - N_2 = 0, \end{cases}$$

dove m è la massa del cilindro. Risolvendo il sistema, si trova $N_1 = mg/(1 + \mu^2)$ e $N_2 = \mu mg/(1 + \mu^2)$. Si noti che $N_1 > 0$ e $N_2 > 0$ sempre, quindi il cilindro non può mai perdere contatto con il pavimento né con il muro. Il modulo del momento torcente esercitato dalle forze d'attrito, calcolato rispetto al centro del cilindro, vale $\tau = R(F_1 + F_2) = mgR\mu(1 + \mu)/(1 + \mu^2)$, dove R è il raggio del cilindro. Poiché il momento d'inerzia vale mR^2 , il tempo necessario a fermare la rotazione è

$$T = \omega_0 \frac{mR^2}{\tau} = \frac{\omega_0 R}{g} \frac{1 + \mu^2}{\mu(1 + \mu)},$$

dove ω_0 è la velocità angolare iniziale.

2 Problemi a Caso

Esempio 2.1 (Asta in equilibrio). Un'asta rigida e sottile, di peso P e lunghezza $4h$, è appoggiata allo spigolo di un gradino, di altezza h , come in Fig. 8. Sia $\mu = 0.8$ il coefficiente di attrito statico tra l'asta e il pavimento. Invece, l'attrito nel punto di contatto tra l'asta e il gradino è trascurabile.

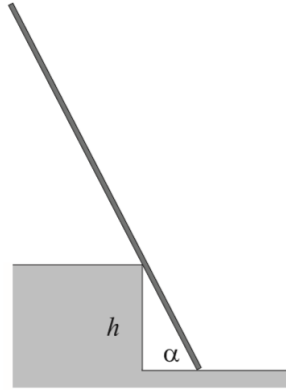


Figura 8: Asta appoggiata al gradino.

1. Trova l'intervallo di valori entro cui può variare l'angolo α che l'asta forma con l'orizzontale (restando appoggiata al gradino), indipendentemente dalle condizioni di equilibrio.
2. Trova le intensità delle forze vincolari necessarie per tenere in equilibrio l'asta, in funzione di P e di α .
3. Trova per quali valori di α l'asta risulta in equilibrio rispetto alla rotazione attorno allo spigolo del gradino. La disequazione che si ottiene può essere studiata sia analiticamente che numericamente.
4. Trova per quali valori di α l'asta risulta in equilibrio rispetto allo scivolamento sul pavimento, con la precisione di 1° .

Soluzione

1. L'angolo α può variare tra $\arcsin(1/4) \sim 14.5^\circ$ (asta appoggiata con la punta allo spigolo del gradino) e 90° (asta verticale).
2. Le forze che agiscono sull'asta in equilibrio sono: il peso $\vec{P}$, la forza esercitata dal pavimento, che scomporremo in normale $\vec{N}_1$ e tangenziale $\vec{A}$ (attrito statico) e la forza esercitata dal gradino $\vec{N}_2$ normale all'asta perché l'attrito tra quest'ultima e il gradino è trascurabile per ipotesi.

La condizione di equilibrio dell'asta rispetto alle traslazioni è che la somma vettoriale delle forze sia nulla:

$$\vec{P} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{A} = 0,$$

quindi

$$\begin{cases} N_2 \sin \alpha - A = 0, \\ N_1 + N_2 \cos \alpha - P = 0. \end{cases}$$

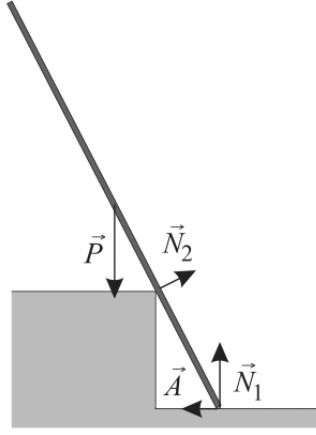


Figura 9: Diagramma delle forze.

La condizione di equilibrio rispetto alle rotazioni è data dall'annullarsi dei momenti delle forze rispetto ad uno stesso punto, che può essere scelto in modo arbitrario se la risultante delle forze è nulla. Per comodità, scegliamo il punto di contatto tra l'asta e il pavimento, quindi

$$2Ph \cos \alpha - N_2 \frac{h}{\sin \alpha} = 0.$$

Dopo qualche semplice conto si ricava

$$\begin{aligned} N_1 &= P(1 - 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha), \\ A &= 2P \sin^2 \alpha \cos \alpha, \\ N_2 &= 2P \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

3. Per avere equilibrio rispetto alle rotazioni si deve avere $N_1 > 0$ cioè

$$2 \sin \alpha \cos^2 \alpha < 1, \quad \Rightarrow \quad \sin 2\alpha \cos \alpha < 1.$$

Nell'intervallo che ci interessa, questa disequazione è sempre soddisfatta perché $\sin 2\alpha \leq 1$ e $\cos \alpha \leq 1$ e i due non sono mai uguali ad 1 contemporaneamente. Quindi possiamo concludere che l'asta non ruoterà mai intorno allo spigolo del gradino.

4. Affinché l'asta non scivoli, deve essere $A < \mu N_1$, ovvero

$$2P \sin^2 \alpha \cos \alpha < \mu P(1 - 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha), \quad \Rightarrow \quad \sin 2\alpha(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = f(\alpha) < \mu.$$

Studiamo per punti la funzione al primo membro, nell'intervallo che ci interessa (Tabella 1).

Si vede che la funzione è crescente e successivamente decrescente, supera il valore di 0.8 nell'intervallo $[20^\circ; 30^\circ]$ e torna sotto tra $[60^\circ; 70^\circ]$, quindi analizziamo meglio questi due intervalli (Tabella 2). Per le precisioni richieste, possiamo concludere che l'asta è in equilibrio per

$$\alpha \in (14.5^\circ; 23^\circ) \cup (69^\circ; 90^\circ).$$

α	$f(\alpha)$
14	0.478
20	0.703
30	1.033
40	1.237
50	1.261
60	1.096
70	0.780
80	0.384
90	0

Tabella 1: Funzione nell'intervallo $[14.5^\circ; 90^\circ]$.

α	$f(\alpha)$	α	$f(\alpha)$
20	0.703	60	1.096
22	0.775	62	1.043
24	0.845	64	0.985
26	0.912	66	0.921
28	0.975	68	0.852
30	1.033	70	0.780

Tabella 2: Intervalli $[20^\circ; 30^\circ]$ e $[60^\circ; 70^\circ]$.

Esempio 2.2 (Lastra di ghiaccio). *Supponendo che l'aria al di sopra di un lago ghiacciato rimanga alla temperatura costante di -5.2°C per 60 giorni, sviluppa un modello per descrivere la velocità con cui cresce lo spessore del ghiaccio a partire dal suo valore iniziale $h_0 = 25\text{ cm}$. Stima lo spessore del ghiaccio dopo 60 giorni, sapendo che dopo 12 giorni vale 37 cm, mentre dopo 21 giorni vale 44 cm.*

Possiamo supporre che l'acqua al di sotto della lastra sia già alla temperatura di 0°C , ma non è diventata ghiaccio perché ancora deve cedere una quantità extra di energia, pari al calore latente di fusione per la sua massa. L'equazione della conduzione del calore dell'acqua all'aria, attraverso la lastra di ghiaccio, è

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha S \frac{T_{\text{acqua}} - T_{\text{aria}}}{h(t)},$$

dove α è la conducibilità termica del ghiaccio, S è la superficie del lago, $h(t)$ è lo spessore istantaneo dello strato ghiacciato, $T_{\text{aria}} = -5.2^\circ\text{C}$ e $T_{\text{acqua}} = 0^\circ\text{C}$. Dato che l'acqua sta già a 0°C , tutto il calore che le viene sottratto serve a farla congelare, quindi possiamo scrivere

$$dQ = \lambda dm = \lambda \rho_{\text{ghiaccio}} S dh.$$

Mettendo a confronto le ultime due equazioni, si trova l'equazione

$$\lambda \rho_{\text{ghiaccio}} S \frac{dh}{dt} = \alpha S \frac{T_{\text{acqua}} - T_{\text{aria}}}{h(t)},$$

che possiamo risolvere separando le variabili

$$h dh = \alpha \frac{T_{\text{acqua}} - T_{\text{aria}}}{\lambda \rho_{\text{ghiaccio}}} dt,$$

ed integrando dall'istante iniziale ad uno generico

$$h^2(t) - h_i^2 = 2\alpha \frac{T_{\text{acqua}} - T_{\text{aria}}}{\lambda \rho_{\text{ghiaccio}}} t.$$

Notiamo che sono presenti alcune costanti di cui non conosciamo il valore, ma non c'è problema! Il testo ci dà già alcuni punti che caratterizzano la funzione $h(t)$. Ad esempio, sappiamo che $h(12 \text{ gg}) = 37 \text{ cm}$, quindi possiamo il valore di tutto il fattore che moltiplica il tempo nell'equazione precedente. Se la riscriviamo come

$$h^2(t) - h_i^2 = \beta t,$$

la condizione precedente diventa

$$(37 \text{ cm})^2 - (25 \text{ cm})^2 = \beta \cdot 12 \text{ gg}, \quad \implies \quad \beta = 62 \text{ cm}^2 \text{gg}^{-1}.$$

A questo punto basta calcolare

$$h(60 \text{ gg}) = \sqrt{(25 \text{ cm})^2 + \beta \cdot 60 \text{ gg}} = 65.9 \text{ cm}.$$

Quindi, molti dati forniti dal problema erano superflui! Un altro modo di risolvere il problema è quello di disegnare i tre punti della funzione $h(t)$ dati nel testo e guessare che essa sia una parabola con asse orizzontale, della forma $t(h) = ah^2 + bh + c$. Difatti lo è! Imponendo il passaggio per i tre punti si trovano i tre parametri a , b e c e il problema è risolto! Un mago lo ha fatto nel 2015...

Esempio 2.3 (Paradosso del satellite). *Un satellite di massa m si muove inizialmente su un'orbita circolare di raggio R_0 attorno ad un corpo celeste puntiforme, di massa $M \gg m$. Il satellite è soggetto alla forza d'attrito $\vec{F}_a = -A|\vec{v}|\vec{v}$. Supponendo che la forza di attrito sia sufficientemente piccola in modo da poter approssimare l'orbita come istantaneamente circolare, trova la funzione $r(t)$ che descrive l'evoluzione temporale della distanza tra il satellite e il pianeta⁶. Dopo quanto tempo il satellite cade sul suolo?*

Il bilancio energetico del sistema si scrive

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F}_a = -Av^3.$$

L'energia meccanica del sistema è

$$E = -\frac{GMm}{2r(t)},$$

quindi possiamo scrivere

$$\frac{GMm}{2r^2(t)} \frac{dr}{dt} = -Av^3.$$

Sfruttiamo l'approssimazione suggerita nel testo: se l'orbita è istantaneamente circolare, la velocità radiale è approssimativamente nulla, mentre la velocità orbitale vale $v = \sqrt{GM/r}$. Sostituendo nell'equazione del bilancio energetico, otteniamo un'equazione differenziale a variabili separabili

$$r^{-\frac{1}{2}} \frac{dr}{dt} = -\frac{2A}{m} (GM)^{\frac{1}{2}},$$

⁶Questo problema è l'analogo meccanico del problema del breakdown dell'atomo di Rutherford. L'unica differenza è che qui l'energia viene dissipata per l'attrito, mentre il collasso atomico avverrebbe a causa dell'emissione di radiazione da carica accelerata.

la cui soluzione è

$$r(t) = R_0 \left[1 - \frac{A}{m} \left(\frac{GM}{R_0} \right)^{\frac{1}{2}} t \right]^2.$$

Intanto, per $t = 0$ otteniamo $r = R_0$. In aggiunta, notiamo che la soluzione $r(t)$ è una funzione monotona decrescente. Questo ha molto senso, perché l'attrito tende sempre a far rimpicciolire l'orbita. In generale, orbite più piccole corrispondono a sistemi più legati, quindi ad energie piccole (negative). E la forza di attrito cosa fa? Riduce l'energia del sistema! Tutto torna!

Il tempo richiesto per raggiungere $r = 0$ è

$$t_{fall} = \frac{m}{A} \left(\frac{R_0}{GM} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{m}{Av_0},$$

dove v_0 è la velocità orbitale iniziale.

Manca da capire a cosa è dovuto il titolo di questo problema. Dove sta il paradosso? Abbiamo detto che $r(t)$ è una funzione decrescente, quindi la velocità $v(t) = \sqrt{GM/r(t)}$ è una funzione crescente! Come è possibile che la velocità cresca se c'è attrito? In realtà è possibilissimo, perché la forza di attrito non è l'unica forza in gioco. Bisogna tener conto della forza gravitazionale! Inoltre, ricordiamoci che le forze dissipative fanno sicuramente diminuire l'energia meccanica del sistema (come in questo caso), ma non è detto che facciano diminuire l'energia cinetica. La fanno diminuire solo se sono le uniche forze in gioco a compiere lavoro⁷! Quindi, in realtà, questo non è un paradosso.

Se volete esercitarvi ad impostare e a svolgere integrali, provate a calcolare quanti giri compie il satellite e quanto spazio percorre prima di cadere sul pianeta. Se ci sono problemi di divergenza in $r = 0$, provate a dare un raggio non nullo al pianeta ($0 < R_p < R_0$). Per lo spazio percorso, serve sapere come si calcola la lunghezza di una curva in coordinate polari. Infine, provate a trovare la traiettoria $r(\theta)$ del satellite.

Esempio 2.4 (Disco dentro un solenoide). *Un disco perfettamente conduttore di raggio a e spessore trascurabile è mantenuto in rotazione con velocità angolare $\vec{\omega}$, in presenza di un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ parallelo a $\vec{\omega}$.*

1. *In condizioni stazionarie, quanto vale il campo elettrico generato all'interno del disco? Quanto vale la differenza di potenziale tra il centro e il bordo del disco?*
2. *Mediante contatti striscianti, viene realizzato un circuito chiuso e non rotante tra il centro ed il bordo del disco, come in Fig. 10. Se la resistenza del circuito esterno vale R , quanto deve valere il momento delle forze esterne necessarie a tenere in rotazione il disco a velocità angolare ω ?*
3. *Il circuito esterno del punto precedente viene collegato ad un solenoide, come mostrato in Fig. 11, avente n spire per unità di lunghezza e tale da generare lui stesso il campo magnetico $\vec{B}$. Quanto deve valere ω affinché la corrente possa scorrere in modo stazionario senza necessità di altri generatori elettrici che alimentino il sistema?*

⁷In questo problema potrebbe sembrare che la forza gravitazionale non compia lavoro perché, essendo il satellite sempre su orbite circolari, lo spostamento è sempre tangenziale e mai radiale. In realtà, nonostante questa approssimazione, stiamo comunque assumendo che la gravità compia lavoro perché prendiamo per vera la relazione $v(t) = \sqrt{GM/r(t)}$ in ogni istante. Seppur lentamente, il satellite si avvicina al pianeta, quindi la forza gravitazionale compie lavoro.

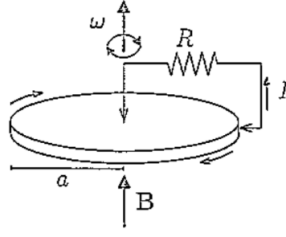


Figura 10: Disco rotante e circuito non rotante.

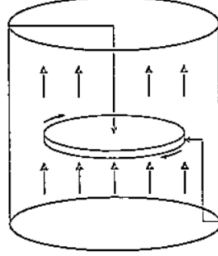


Figura 11: Schematizzazione del solenoide connesso al circuito.

1. I portatori di carica all'interno del disco risentono della forza di Lorentz, che li addensa in modo da creare una differenza di potenziale tra il centro del disco e il bordo. Quindi, gli elettroni risentiranno anche di una forza elettrica. La risultante delle due forze deve essere centripeta, in modo da garantire un moto circolare uniforme. In formule,

$$m\omega^2 r = -qE(r) + q\omega r B = eE(r) - e\omega r B,$$

dove $0 < r < a$. Segue che

$$E(r) = \left(\frac{m}{e}\omega + B \right) \omega r,$$

quindi la differenza di potenziale tra centro e bordo vale

$$\Delta V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^a E(r) dr = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{e}\omega + B \right) \omega a^2.$$

2. La potenza dissipata nella resistenza vale

$$P = \frac{\Delta V^2}{R} = \frac{\omega^2 a^4}{4R} \left(\frac{m}{e}\omega + B \right)^2.$$

Calcoliamo la derivata temporale dell'energia cinetica rotazionale

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} I \left(2\vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right) = \frac{1}{2} I (2\vec{\omega} \cdot \vec{\alpha}) = \frac{1}{2} I \left(2\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\tau}}{I} \right) = \vec{\omega} \cdot \vec{\tau},$$

dove $\vec{\tau}$ è il momento delle forze esterne. Per far sì che il disco continui a ruotare con velocità angolare fissa, bisogna richiedere che $P = \frac{dK}{dt}$. Segue che

$$\vec{\tau} = \frac{\omega a^4}{4R} \left(\frac{m}{e}\omega + B \right)^2 \hat{\omega}.$$

3. Il campo magnetico all'interno di un solenoide molto lungo con n spire per unità di lunghezza, percorso dalla corrente I , vale

$$B = \mu_0 n I.$$

Se vogliamo che questo sia lo stesso campo magnetico subito dai portatori di carica nei punti precedenti, dobbiamo semplicemente sostituire al suo interno $I = \frac{\Delta V}{R}$. Segue che

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n \left(\frac{m}{e} \omega + B \right) \omega a^2.$$

da cui

$$\omega = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{eB}{m} \right)^2 + \frac{8eRB}{\mu_0 n m a^2}} - \frac{eB}{m} \right].$$

Esempio 2.5 (Perdite in un conduttore cilindrico). Consideriamo un circuito elettrico in corrente continua composto solamente da un generatore di tensione ΔV ed un cavo di resistività omogenea ρ . La lunghezza del cavo è L , mentre il raggio della sua sezione vale $a \ll L$.

1. Supponendo che il campo elettrico all'interno del filo sia distribuito omogeneamente sulla sezione, quant'è il suo valore? Quanto vale il campo magnetico all'interno del filo?
2. Facendo riferimento solo ai tratti rettilinei del circuito, quanto valgono il campo magnetico ed il campo elettrico poco fuori dal cavo?
3. Quanto vale il vettore di Poynting poco fuori dal cavo? Interpreta il risultato in termini del bilancio energetico.

1. La legge di Ohm microscopica è

$$\vec{J} = \sigma \vec{E},$$

dove $\vec{J}$ è la densità di corrente e σ è la conducibilità elettrica, cioè il reciproco della resistività. Essendo $\vec{E}$ omogeneo sulla sezione, lo sarà anche $\vec{J}$. Ma

$$J \equiv \frac{I}{\pi a^2} = \frac{\Delta V}{\pi a^2 R} = \frac{\Delta V}{\rho L},$$

quindi, confrontando le due si ottiene

$$\vec{E} = \frac{\Delta V}{L} \hat{z},$$

dove z indica la direzione dell'asse del cavo. Il campo magnetico è quello di un cilindro percorso da corrente omogenea, cioè

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 J r \hat{\phi} = \frac{\mu_0 \Delta V r}{2 \rho L} \hat{\phi}, \quad 0 \leq r \leq a.$$

2. Per questa richiesta dobbiamo usare le condizioni di interfaccia dei campi. Sappiamo che

$$\begin{cases} E_{2\parallel} - E_{1\parallel} = 0, \\ D_{2\perp} - D_{1\perp} = \sigma_l, \\ H_{2\parallel} - H_{1\parallel} = \mathcal{F}_l, \\ B_{2\perp} - B_{1\perp} = 0, \end{cases}$$

ma la seconda e la quarta non ci sono utili perché i campi che abbiamo sono tutti tangenti alla superficie di interfaccia. Inoltre, non essendo in presenza di mezzi magnetici e non essendoci corrente superficiale libera sull'interfaccia, troviamo

$$\begin{cases} E_{2\parallel} = E_{1\parallel}, \\ B_{2\parallel} = B_{1\parallel}. \end{cases}$$

Quindi i campi sono continui sull'interfaccia e valgono

$$\begin{cases} E_{2\parallel} = \frac{\Delta V}{L}, \\ B_{2\parallel} = \frac{\mu_0 a \Delta V}{2\rho L}. \end{cases}$$

3. Il vettore di Poynting poco fuori dal cavo vale

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\Delta V}{L} \hat{z} \right) \times \left(\frac{\mu_0 a \Delta V}{2\rho L} \hat{\phi} \right) = \frac{a \Delta V^2}{2\rho L^2} \hat{r},$$

dove $\hat{r}$ indica la direzione radiale. Calcoliamo la potenza elettromagnetica che fluisce fuori dal cavo. Essa non è altro che il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie cilindrica, quindi vale

$$P = |\vec{S}| 2\pi a L = \frac{\pi a^2 \Delta V^2}{\rho L}.$$

Calcoliamo adesso la potenza dissipata dal filo per effetto Joule:

$$P = \frac{\Delta V^2}{R} = \frac{\pi a^2 \Delta V^2}{\rho L}.$$

Le ultime due quantità coincidono e non è un caso!