

Fluidodinamica

Daniele Battesimo Provenzano, Sigillo 2025

Problema 1 (Bilancia nel vuoto). Stima quanti grammi in più segnerebbe la bilancia se ti pesassi nel vuoto.

Problema 2 (Acqua e olio). Un tubo a forma di U , con i due rami dritti di sezione 3 cm^2 e posizionati verticalmente, contiene una certa quantità d'acqua. In una delle due aperture vengono versati 0.08 L di olio, la cui densità è 920 kg/m^3 . Quanto vale, in valore assoluto, la differenza di quota tra le due superfici libere di liquido?

Problema 3 (Superman e la cannuccia). Superman tenta di bere l'acqua di un lago usando una cannuccia lunga più di 2 km , ma non ci riesce. Quanto vale, al massimo, l'altezza sul livello del lago raggiunta dall'acqua nella cannuccia?

Problema 4 (Mongolfiera). Un esploratore inesperto è in viaggio su una mongolfiera, la cui massa complessiva (esploratore incluso) ammonta a 350 kg . Alcune decisioni sbagliate portano la mongolfiera a cadere verso il basso con un'accelerazione di 1.5 m/s^2 . Per evitare una collina sul percorso, l'esploratore si libera di una zavorra fino a raggiungere un'accelerazione di 1 m/s^2 verso l'alto. Quanto vale la massa della zavorra?

Problema 5 (Forza su una diga). Una diga di larghezza L sfrutta l'acqua di un lago per produrre energia elettrica. Se l'acqua bagna la diga fino all'altezza H , quanto vale il modulo della forza a cui essa è soggetta?

Problema 6 (Bacino di carenaggio). Considera il problema di galleggiamento di una nave in un bacino di carenaggio, semplificato nei seguenti termini: il bacino è un parallelepipedo retto di larghezza a e lunghezza b e la nave è un prisma retto della stessa lunghezza, con base triangolare equilatera di lato $a/2$ e densità uniforme δ , di poco inferiore a quella dell'acqua. Supponi, inoltre, che la faccia superiore del prisma sia orizzontale quando esso galleggia. Calcola il minimo volume di acqua che bisogna versare nella vasca per far galleggiare la nave.

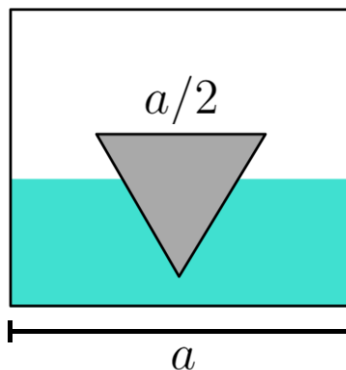


Figura 1: Sezione trasversale del bacino di carenaggio.

Problema 7 (Bolla d'aria). Una bolla d'aria viene immessa alla base di un cilindro chiuso, alto 10 m e pieno d'acqua. Al momento dell'immissione della bolla, la pressione sul fondo del cilindro è 1.1 atm . La bolla inizia a salire fino a quando non raggiunge la sommità del cilindro. Quanto vale adesso la pressione sul fondo dopo la risalita?

Problema 8 (Palloncino di elio). Un palloncino si trova dentro un camion che a un certo punto accelera in avanti. Cosa succede al palloncino nel sistema di riferimento del camion?

Problema 9 (Rubinetto). Da un rubinetto di sezione A_0 fuoriesce acqua alla velocità $\vec{v}_0$, rivolta verso il basso. Trova la sezione del flusso a una generica quota z , se la bocca del rubinetto è posta all'altezza h .

Problema 10 (Parabole). Una contenitore di forma cilindrica, alto $H = 50$ cm, viene posto su un piedistallo alto $h = 50$ cm e riempita d'acqua fino al bordo. Viene creato un piccolo foro sulla sua superficie laterale, vicino alla base inferiore del cilindro, da cui l'acqua inizia a fuoriuscire. Quanto vale la distanza massima raggiunta in orizzontale dal getto d'acqua?

Problema 11 (Svuotamento di un secchio). Calcola il tempo di svuotamento di un secchio cilindrico di altezza h_0 e area di base A , se sul fondo viene creato un foro di sezione $S \ll A$.

Problema 12 (Carrello accelerato). Un carrello con dell'acqua all'interno si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione $a \hat{x}$. Trova come si dispone l'acqua.

Problema 13 (Secchio rotante). Un recipiente cilindrico di raggio R , contenente un volume V di un certo liquido, ruota attorno al suo asse con velocità angolare ω . Trova la forma della superficie del pelo del liquido una volta che il sistema ha raggiunto il regime stazionario.

Problema 14 (Recipiente). Determinare che forma deve avere un recipiente a simmetria cilindrica in modo che in esso il livello dell'acqua si abbassi a velocità costante se sul fondo viene creato un foro di dimensioni molto piccole.

Problema 15 (Due secchi). Consideriamo due secchi identici pieni d'acqua, ciascuno con un foro sul fondo collegato a una cannuccia verticale. Le cannucce hanno la stessa sezione, ma una è più lunga dell'altra. Trascurando le perdite dovute alla viscosità, quale dei due secchi si svuota per primo?

Problema 16 (Effetto Magnus). Una palla da baseball può essere lanciata con una certa velocità angolare attorno al proprio asse per ottenere la cosiddetta “palla curva”, schematizzata in figura. Stima la forza laterale F_l e la deflessione d usando l'analisi dimensionale e i dati forniti qui sotto. Assumi che la forza F_l sia direttamente proporzionale a ω e che la costante di proporzionalità adimensionale sia dell'ordine dell'unità.

$$\begin{aligned} m &= 0.145 \text{ kg}, & R &= 3.7 \text{ cm}, & v &= 36 \text{ m/s}, \\ \omega &= 227 \text{ rad/s}, & L &= 18 \text{ m}, & \rho_a &= 1.2 \text{ kg/m}^3. \end{aligned}$$

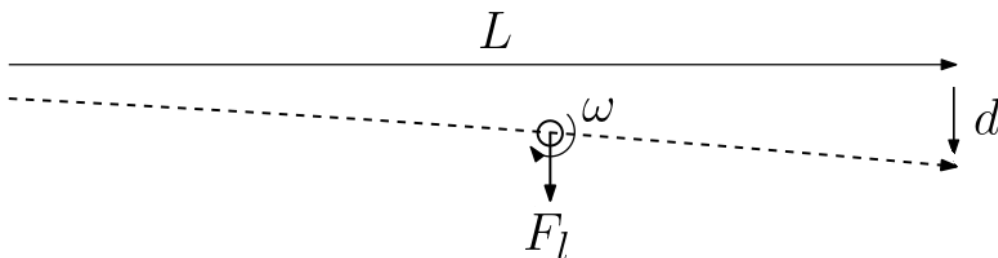


Figura 2: Traiettoria della palla da baseball, vista dall'alto.

Problema 17 (Sfera in caduta). Una piccola sfera di ferro di volume V affonda a velocità costante v in un recipiente pieno d'acqua.

1. Quanto vale la quantità di moto totale dell'acqua?
2. Se il contenitore si trova su un tavolo durante la discesa della sferetta, quanto vale la forza che il tavolo esercita su di esso?

Soluzioni

Soluzione 1 (Bilancia nel vuoto). Per stimare la spinta di Archimede agente sul nostro corpo, basta stimare il volume dello stesso. Una buona stima è 70 litri, quindi circa $7 \times 10^{-2} \text{ m}^3$. Se si vuole essere più precisi, basta immergersi in una piscina e misurare la variazione di altezza dell'acqua, risalendo così alla variazione di volume. La spinta di Archimede sul nostro corpo vale circa $F = \rho_{\text{aria}} g V \approx 0.8 \text{ N}$, che corrisponde a poco meno di 100 g.

Soluzione 2 (Acqua e olio). Poiché l'olio non è solubile e ha densità minore di quella dell'acqua, esso si disporrà sopra l'acqua, formando una colonna di altezza $h_{\text{olio}} = V/S$, dove V è il volume di olio ed S la sezione del tubo. Sul pelo libero di entrambi i rami del tubo la pressione è quella atmosferica p_0 , mentre la pressione alla base della colonna di olio può essere trovata tramite la legge di Stevino:

$$p_{\text{olio}} = p_0 + \rho_{\text{olio}} g h_{\text{olio}},$$

dove ρ_{olio} è la densità dell'olio. Essendo l'acqua all'equilibrio idrostatico, nell'altro ramo del tubo, alla stessa altezza della base della colonna d'olio, dovrà esserci una pressione uguale,

$$p_{\text{olio}} = p_{\text{atm}} + \rho_{\text{a}} g h_{\text{a}},$$

dove h_{a} è l'altezza della colonna d'acqua al di sopra di tale punto. Da qui troviamo $h_{\text{a}} = h_{\text{olio}} \rho_{\text{olio}} / \rho_{\text{a}}$ e la differenza di altezza

$$\Delta h = h_{\text{olio}} - h_{\text{a}} = \frac{V}{S} \left(1 - \frac{\rho_{\text{olio}}}{\rho_{\text{a}}} \right).$$

Soluzione 3 (Superman e la cannuccia). La pressione nell'estremità bassa della cannuccia è necessariamente la pressione atmosferica p_0 , mentre la pressione in cima sarà come minimo nulla. Applicando la legge di Stevino, l'altezza massima che si può avere nella cannuccia è quella che genera alla base una pressione pari a quella atmosferica, ovvero

$$h_{\text{max}} = \frac{p_0}{\rho g}.$$

Un'altezza maggiore farebbe uscire l'acqua dall'estremità inferiore della cannuccia, abbassando il livello della colonna fino ad h_{max} .

Soluzione 4 (Mongolfiera). Sulla mongolfiera agiscono due forze, la forza peso e la spinta di Archimede F_A . La spinta di Archimede dipende dal volume della mongolfiera, che cambierà di una quantità trascurabile dopo aver eliminato le zavorre. L'accelerazione iniziale della mongolfiera sarà quindi

$$a_0 = g - \frac{F_A}{m},$$

dove abbiamo indicato con m la massa totale. Dopo il rilascio delle zavorre di massa m_Z , la nuova accelerazione sarà

$$a_1 = g - \frac{F_A}{m - m_Z}.$$

Le due equazioni costituiscono un sistema di due equazioni nelle due incognite F_A , m_Z . Risolvendolo, troviamo

$$m_Z = m \frac{a_0 - a_1}{g - a_1}.$$

Ricordiamo che, nelle convenzioni usate in questa soluzione, vale $a_0 > 0$, $g > 0$, $a_1 < 0$.

Soluzione 5 (Forza su una diga). Consideriamo un elemento infinitesimo della diga a profondità y , di area $dA = L dy$. La forza infinitesima esercitata su tale area è

$$dF = P(y) dA = \rho g y L dy.$$

Integrando tra 0 e H , otteniamo la forza totale

$$F = \int_0^H \rho g y L dy = \rho g L \int_0^H y dy = \rho g L \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^H = \frac{1}{2} \rho g L H^2.$$

Soluzione 6 (Bacino di carenaggio). La condizione di galleggiamento è che la forza di Archimede sia pari alla forza peso della nave. Supponiamo che, in un certo momento, l'altezza dell'acqua nella vasca sia h e che la nave tocchi il fondo. Il volume di acqua spostato è

$$V(h) = \frac{h^2 b}{\sqrt{3}}.$$

Detta ρ la densità dell'acqua, la condizione di galleggiamento è

$$\rho g V(h) = M_{\text{nave}} g,$$

da cui possiamo ricavare il valore di h per cui la nave si stacca dal fondo

$$h_m = \frac{a}{4} \sqrt{\frac{3\delta}{\rho}}.$$

Il volume di acqua necessario è, dunque,

$$V_A = abh_m - V(h) = \sqrt{\frac{3\delta}{\rho}} \left(\frac{a^2 b}{4} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\delta}{\rho}} \right).$$

Soluzione 7 (Bolla d'aria). Durante la risalita della bolla, l'acqua può essere trattata come un fluido incompressibile e il suo volume rimane, con buona approssimazione, costante. Di conseguenza, anche il volume della bolla resta costante (la temperatura continua a essere la stessa dell'acqua). Se volume e temperatura rimangono invariati, allora anche pressione della bolla è costante e pari a 1.1 atm atmosfere. Una volta arrivata alla sommità del cilindro, l'acqua in quel punto sarà alla pressione di 1.1 atm e, conseguentemente, la pressione alla base sarà 2.1 atm atmosfere per la legge di Stevino.

Soluzione 8 (Palloncino di Elio). Il palloncino è complessivamente meno denso dell'aria circostante. Di conseguenza, nel sistema di riferimento del camion, la forza fittizia agente su di esso è minore di quella agente su uno stesso volume d'aria spostato. Quindi esso viene spinto in avanti dalla pressione nella direzione in cui il camion accelera fino a che non sbatte sulla parete. A questo risultato ci si può arrivare anche in questo modo: nel sistema accelerato è come se ci fosse una gravità fittizia lungo $\hat{x}$. In analogia al caso verticale in cui il palloncino, essendo più leggero, si sposta nel verso opposto alla forza fittizia. Per lo stessa ragione, se il camion svoltasse a destra, nel sistema di riferimento del camion il palloncino si sposterebbe verso destra.

Soluzione 9 (Rubinetto). Dato che la densità è costante, vale

$$v_z A(z) = v_0 A_0 \quad \Rightarrow \quad A(z) = \frac{v_0 A_0}{v_z} = \frac{A_0}{\sqrt{\frac{2g(h-z)}{v_0^2} + 1}},$$

dove v_z è stata trovata imponendo la conservazione dell'energia meccanica. Quindi, la sezione del flusso si restringe perché la velocità aumenta¹.

Soluzione 10 (Parabole). Per la legge di Torricelli, la velocità v dell'acqua che fuoriesce dal foro vale

$$v = \sqrt{2gx},$$

dove x è l'altezza della superficie libera dell'acqua sopra al foro. Osserviamo dunque che la massima velocità iniziale, che determina la gittata dell'acqua, è

$$v_{\max} = \sqrt{2Hg}.$$

L'acqua uscente, la cui velocità iniziale è orizzontale, esegue un moto parabolico, descritto dall'equazione

$$\begin{cases} x = v_{\max}t, \\ y = h - \frac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

Ponendo $y = 0$ possiamo risolvere per x , ottenendo

$$x = v_{\max} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{hH}.$$

Soluzione 11 (Svuotamento di un secchio). Data l'ipotesi sulla sezione del tubo, il flusso può essere considerato stazionario. Detta v la velocità dell'acqua non appena esce dal foro, il teorema di Bernoulli implica

$$v = \sqrt{2gh},$$

dove h è l'altezza del liquido. La velocità del pelo del liquido è legata alla portata in uscita, che è l'opposto della derivata del volume di liquido contenuto nel secchio

$$vS = -A \frac{dh}{dt}.$$

Sostituendo nella legge di Torricelli, troviamo

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{S}{A} \sqrt{2gh},$$

che è un'equazione differenziale con soluzione

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{St}{2A} \sqrt{2g} \right)^2.$$

Dunque, il tempo di svuotamento vale

$$t = \frac{A}{S} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

Soluzione 12 (Carrello accelerato). Mettendoci nel sistema accelerato, abbiamo

$$\phi = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz + ax = \text{costante}.$$

Ma, all'equilibrio, la velocità è nulla in tutti i punti del fluido. Allora le superfici equipotenziali (e isobare) obbediscono all'equazione

$$z(x) = \text{costante} - \frac{a}{g}x,$$

che rappresenta dei piani, inclinati rispetto alla base del carrello.

¹Dato che la sezione diminuisce, la componente radiale della velocità v_r è non nulla. Quindi, a rigore dovremmo tenere conto anche di questa quando imponiamo la conservazione dell'energia. Tuttavia $v_r \ll v_z$ se v_0 è abbastanza grande, quindi possiamo trascurare questo contributo.

Soluzione 13 (Secchio rotante). Il problema può essere risolto in due modi. Il primo è l'applicazione del diagramma di corpo libero su un piccolo elemento fluido, provate a farlo da soli. Il secondo sfrutta comunque l'invariante di Bernoulli! L'idea furba sta nel mettersi nel sistema di riferimento centrato in un punto qualsiasi dell'asse del cilindro e che ruota alla stessa velocità angolare del fluido. In tale sistema, il fluido appare fermo. Essendo fermo, il flusso è irrotazionale! A questo punto possiamo usare il teorema di Bernoulli e dire che

$$B' = \frac{p(z, r)}{\rho} + \phi' + \frac{1}{2}v'^2(z, r) = \frac{p_0}{\rho} + \left(gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \right) + 0,$$

dove abbiamo usato il fatto che la pressione, essendo una quantità scalare, ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento, la velocità in ogni punto è nulla e il potenziale è

$$\phi' = gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2,$$

cioè la somma dei potenziali gravitazionale e centrifugo. Essendo in un sistema di riferimento non inerziale, bisogna tener conto anche di quest'ultimo. Invece, la forza di Coriolis non dà alcun contributo perché $v = 0$ ovunque. Dall'equazione di Bernoulli segue che

$$z = \frac{B' - p_0}{\rho g} + \frac{\omega^2}{2g} r^2,$$

cioè un paraboloide con concavità rivolta verso l'alto. La costante B' si trova dalla condizione sulla conservazione del volume:

$$V = \int_0^R \left(\frac{B' - p_0}{\rho g} + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \right) 2\pi r \, dr = \pi R^2 \left(\frac{B' - p_0}{\rho g} + \frac{\omega^2 R^2}{4g} \right).$$

La forma della superficie libera di liquido è, dunque,

$$z = \frac{V}{\pi R^2} + \frac{\omega^2}{4g} (2r^2 - R^2),$$

che è indipendente dalla densità. Notate che, se ω è molto grande, per $r = 0$ può succedere che z sia negativo. In questo caso il liquido non tocca affatto l'asse di rotazione ed è distribuito più verso le pareti del recipiente.

Soluzione 14 (Recipiente). Sia A la superficie del foro. Per recipienti a simmetria cilindrica, la superficie del liquido ha area $S = \pi r^2(h)$ dove r è il raggio del cerchio alla quota h . Per la conservazione della portata si ha

$$S \left| \frac{dh}{dt} \right| = Av,$$

dove v è la velocità di fuoriuscita dell'acqua dal foro, che per Bernoulli vale $v = \sqrt{2gh}$. Noi vogliamo che l'acqua si abbassi a un rate costante, quindi prendiamo $\frac{dh}{dt} = c$. Sostituendo, si ottiene

$$c\pi r^2 = A\sqrt{2gh} \quad \Rightarrow \quad h(r) = kr^4,$$

con k costante. Questa curva è il frutto della rotazione di una quartica canonica (tipo $y = x^4$) attorno all'asse y . Dobbiamo, però, ricordarci che Torricelli non vale più quando il livello dell'acqua è molto basso, perché prima o poi la superficie del pelo dell'acqua diventa paragonabile a quella del foro.

Soluzione 15 (Due secchi). La velocità di uscita all'estremità inferiore della cannuccia è data da

$$v = \sqrt{2gH},$$

dove H è la differenza di pressione tra la superficie libera del liquido e l'estremità inferiore della cannuccia. Se la cannuccia è più lunga, il punto di uscita si trova più in basso, quindi H è maggiore. Quindi, la velocità è maggiore e, pertanto, il secchio con la cannuccia più lunga si svuota prima.

Soluzione 16 (Effetto Magnus). La forza F_l è sicuramente indipendente dalla massa della palla e dalla distanza percorsa perché è una forza dovuta al fluido in cui il corpo si muove. Usando l'ipotesi che F_l sia direttamente proporzionale a ω , data nel testo, si ha

$$F_l = C\rho_a^\alpha \omega v^\beta R^\gamma,$$

che, a livello dimensionale, diventa

$$\frac{[M][L]}{[T]^2} = \left(\frac{[M]}{[L]^3}\right)^\alpha \frac{1}{[T]} \left(\frac{[L]}{[T]}\right)^\beta [L]^\gamma,$$

da cui $\alpha = 1$, $\beta = 1$ e $\gamma = 3$. In conclusione, dato che il testo ci suggerisce che $C \approx 1$, troviamo

$$F_l \approx \rho_a \omega v R^3 \approx 0.5 \text{ N}.$$

Dato che ci si aspetta una piccola deflessione, si può assumere che la forza laterale sia sempre perpendicolare alla direzione iniziale di volo. La palla segue una traiettoria parabolica e la deflessione è data da

$$d \approx \frac{1}{2} a_l t^2,$$

dove

$$a_l = \frac{F_l}{m} \quad \text{e} \quad t = \frac{L}{v}.$$

Il risultato finale è

$$d \approx \frac{F_l L^2}{2mv^2} = \frac{\rho_a \omega L^2 R^3}{2mv} = 0.44 \text{ m}.$$

Soluzione 17 (Sfera in caduta). Durante il moto della sfera, la distribuzione di massa del sistema cambia. Al tempo t , il centro di massa del sistema si è spostato della distanza

$$s = vt \frac{\rho_s V - \rho_a V}{M},$$

dove M è la massa totale del sistema e V il volume della sfera, mentre ρ_s e ρ_a sono rispettivamente le densità della sfera e dell'acqua. Ciò deriva da questo semplice ragionamento: se la sferetta si è spostata della quantità vt , possiamo pensare che una sferetta di acqua delle stesse dimensioni abbia preso il posto che essa occupava precedentemente. Quindi, la quantità di moto totale del sistema vale

$$p_{\text{tot}} = \frac{Ms}{t} = v\rho_s V - v\rho_a V,$$

dove il primo termine a destra rappresenta la quantità di moto della sfera di ferro, mentre il secondo è la quantità di moto della sfera d'acqua. Il centro di massa del sistema scende a velocità costante, quindi la forza totale agente su di esso è nulla! Di conseguenza, la forza che il tavolo esercita sul contenitore è uguale e opposta alla forza peso del sistema.