SCUOLA SUPERIORE DI CATANIA

Dispense

Stage di preparazione per i Campionati Nazionali di Fisica

Fluidodinamica

Daniele Battesimo Provenzano

ANNO ACCADEMICO 2024-2025

Indice

1 Richiami di Fluidostatica **1**

2 Conservazione della Portata **1**

3 Invariante di Bernoulli **3**

4 Equazione di Bernoulli non stazionaria **14**

5 Problemi **17**

1 Richiami di Fluidostatica

- Cos'è un fluido?
- Legge di Pascal
- Legge di Stevino
- Legge di Archimede

2 Conservazione della Portata

Consideriamo un tubo di sezione variabile $A(x)$, che si estende in direzione x come in Fig. 1. Vogliamo scrivere la conservazione della quantità di materia per un fluido che scorre

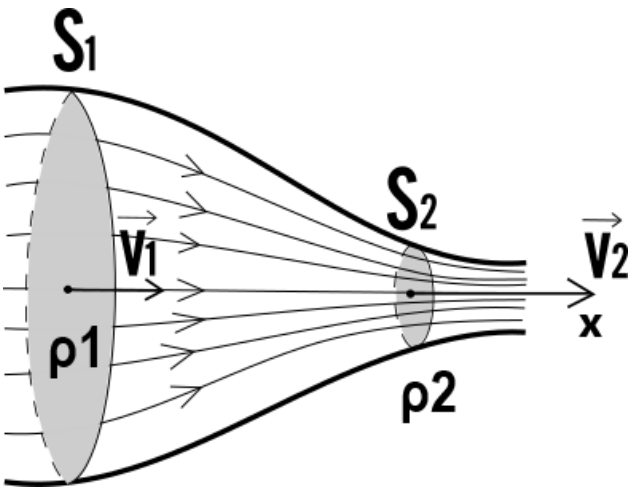

Figura 1: Tubo con sezione variabile.

dentro il tubo con velocità orizzontale $v(x)$ e densità $\rho(x)$, indipendenti dal tempo. Dobbiamo imporre che, presa la zona di tubo compresa tra due generiche coordinate x_1 e x_2, tanta materia entra quanta ne esce. Ciò è vero se il flusso di materia attraverso la sezione $A(x)$ è costante, cioè indipendente da x. In formule

$$\Phi(m) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho(x)A(x)\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \rho(x)A(x)\,v(x) = \text{costante}.$$

In generale il ragionamento resta valido se la velocità dipende dal tempo. Il risultato trovato invece non vale se è ρ a dipendere dal tempo. Infatti, a differenza di prima, in questo caso si

può avere un accumulo temporaneo di materia nella regione compresa tra x_1 e x_2. Detta M la massa di fluido compresa in questa regione, la sua variazione nel tempo è uguale al flusso netto entrante:

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \Phi_1(m) - \Phi_2(m) = \rho(x_1,t)A(x_1)\,v(x_1) - \rho(x_2,t)A(x_2)\,v(x_2).$$

Quest'ultima quantità può essere positiva o negativa, in base alle condizioni esterne che regolano il valore della densità

Esempio 2.1 (**Rubinetto**). *Da un rubinetto di sezione A_0 fuoriesce acqua alla velocità $\vec{v}_0$, rivolta verso il basso. Trova la sezione del flusso a una generica quota z, se il rubinetto è posto ad altezza h.*

Soluzione. Dato che la densità è costante, vale

$$v_z A(z) = v_0 A_0 \quad \Longrightarrow \quad A(z) = \frac{v_0 A_0}{v_z} = \frac{A_0}{\sqrt{\dfrac{2g(h-z)}{v_0^2} + 1}},$$

dove v_z è stata trovata imponendo la conservazione dell'energia meccanica. Quindi, la sezione del flusso si restringe perché la velocità aumenta[1].

Esempio 2.2 (**Chiudere il rubinetto**). *Quando mettiamo un dito davanti alla bocca del rubinetto la velocità del flusso aumenta per mantenere costante la portata di acqua. Invece, quando azioniamo la maniglia per chiudere progressivamente il rubinetto, la portata di acqua diminuisce. A cosa è dovuta questa differenza?*

Soluzione. Quando ostacoliamo il getto d'acqua col dito, la sezione a disposizione dello stesso diminuisce e la velocità di fuoriuscita aumenta per conservare la portata. Come vedremo alla fine, questo fenomeno vale solo se la sezione occlusa è abbastanza piccola. Quando azioniamo la maniglia, la sezione interna di una parte del rubinetto diminuisce, ma la velocità dell'acqua non aumenta. Quindi la portata diminuisce via via. In entrambi i casi sottoponiamo il flusso ad una diminuzione della sezione, ma gli effetti sembrano essere diversi. Perché questa discriminazione? La spiegazione sta nella forma della valvola interna al rubinetto, azionata dalla maniglia. Essa è fatta in modo da rendere il flusso turbolento non appena inizia a chiudersi. La turbolenza fa sì che la pressione nel rubinetto e resistenza incontrata dal fluido aumentino, facendo diminuire la velocità. Se nel caso della resistenza è facile intuire il perché, lo stesso non può dirsi nel caso dell'aumento di pressione. Si può dimostrare che, per un fluido reale - cioè viscoso - che fluisce in un condotto cilindrico, la portata di fluido è proporzionale alla differenza di pressione tra l'inizio e la fine del condotto[2]. Per garantire la giusta direzione del flusso, ad esempio da sinistra verso destra, la pressione all'inizio - sinistra - deve essere maggiore della pressione alla fine - destra. Quando chiudiamo via via la valvola, la pressione del fluido alla fine del rubinetto inizia ad aumentare, avvicinandosi sempre più al valore della pressione all'inizio. Quindi, la differenza di pressione diminuisce sempre di più. Dunque, per quanto detto sopra, la portata diminuisce. La stessa cosa succede quando ostacoliamo gran parte della sezione del rubinetto col dito: in questo caso, il fluido non può più essere approssimato ad ideale. La pressione aumenta con l'aumentare della sezione occlusa, infatti possiamo accorgercene col nostro dito. Per buchi abbastanza piccoli, possiamo anche fermare completamente il flusso d'acqua, come se il nostro dito fungesse da valvola!

---

[1] Dato che la sezione diminuisce, la componente radiale della velocità v_r è non nulla. Quindi, a rigore dovremmo tenere conto anche di questa quando imponiamo la conservazione dell'energia. Tuttavia $v_r \ll v_z$ se v_0 è abbastanza grande, quindi possiamo trascurare questo contributo.

[2] Questo risultato è noto come *legge di Poiseuille*.

3 Invariante di Bernoulli

Quando si studia la meccanica dei fluidi ci si imbatte per forza nel teorema di Bernoulli. La piaga di questo argomento è che ad esso sono comunemente associate nozioni sbagliate, sia dai professori che dai libri di testo. In questa sezione smonteremo alcuni di questi falsi miti[3]. Introduciamo intanto alcune definizioni.

- *Fluido incomprimibile*: la densità è costante nel tempo.
- *Fluido non viscoso*: non ci sono perdite di energia dovute all'attrito tra i vari elementi fluidi.
- *Flusso irrotazionale*: il campo di velocità ha circuitazione nulla per qualsiasi curva chiusa. In soldoni, non ci sono vortici e la velocità non ruota attorno a nessun punto.
- *Flusso stazionario*: il flusso è sempre uguale a sé stesso. Il campo di velocità non cambia nel tempo.
- *Flusso laminare*: gli elementi fluidi seguono linee di flusso ordinate e distinte.
- *Flusso turbolento*: gli elementi fluidi seguono un moto caotico e non prevedibile, le linee di flusso si intersecano e cambiano nel tempo.

Vediamo adesso le due forme più utili del teorema di Bernoulli. Siano p, ρ, v e ϕ rispettivamente la pressione, la densità, la velocità e il potenziale gravitazionale. Sulla superficie terrestre si ha

$$\phi = gz,$$

quindi potete considerare gz al posto di ϕ ogni volta che comparirà nei paragrafi a seguire. Lasciare scritto ϕ serve a ricordarci che il teorema di Bernoulli vale in tutti i campi di forza che ammettono potenziale, quindi conservativi.

Teorema (**Bernoulli, forma forte**). Si consideri un flusso **laminare**, **stazionario** e **irrotazionale** di un fluido **incomprimibile** e **non viscoso**. La quantità

$$B = \frac{p}{\rho} + \phi + \frac{1}{2}v^2$$

è **uniforme in tutti i punti del fluido**.

Teorema (**Bernoulli, forma debole**). Si consideri un flusso **laminare** e **stazionario** di un fluido **incomprimibile** e **non viscoso**. La quantità

$$B = \frac{p}{\rho} + \phi + \frac{1}{2}v^2$$

è **uniforme lungo una stessa linea di flusso**. In generale, il suo valore cambia da linea di flusso in linea di flusso.

[3] La dimostrazione scolastica, che viene fornita anche nei corsi universitari che introducono alla Fisica, è sbagliata per tanti motivi. Su tutti, non è vero che l'energia di un fluido stazionario si conserva! Essa viene trasportata assieme al fluido. Inoltre, non tiene conto delle ipotesi del teorema: non viene mai detto e non si capisce quando esse entrano in gioco.

Una dimostrazione di tipo scolastico, ma fatta molto bene, è fornita in questo articolo.

Importante: Le forme del teorema citate sopra valgono solo per fluidi incomprimibili, ma possono essere generalizzate per un particolare tipo di fluidi comprimibili, cioè quelli barotropici[4]. In questo caso, in entrambe le versioni del teorema la quantità p/ρ va sostituita con

$$\int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p'}{\rho(p')},$$

dove $p_0 \equiv p(\vec{r}_0)$ è un valore di riferimento in un punto sulla particolare linea di flusso o nel fluido. Quindi, considerando due punti A e B, l'equazione di Bernoulli per un fluido barotropico è

$$\begin{aligned} &\int_{p_0}^{p_A} \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} + \phi_A + \frac{1}{2}\, v_A^2 = \int_{p_0}^{p_B} \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} + \phi_B + \frac{1}{2}\, v_B^2, \\ \implies \quad &\int_{p_B}^{p_A} \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} + \phi_A + \frac{1}{2}\, v_A^2 = \phi_B + \frac{1}{2}\, v_B^2, \end{aligned}$$

che equivale a prendere B come punto di riferimento. Essa si riduce all'equazione standard nel caso di fluido a densità uniforme e costante. Vediamo due esempi per un fluido comprimibile isoentropico, cioè adiabatico, e uno comprimibile isotermo.

Esempio 3.1 (**Fluido isoentropico**)**.** Per le trasformazioni adiabatiche si ha

$$pV^\gamma = cost. \quad \implies \quad \frac{p}{\rho^\gamma} = cost. \quad \implies \quad p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma,$$

dove $\gamma \equiv \frac{c_p}{c_v}$ è l'indice adiabatico. Allora si trova

$$\int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p'}{\rho(p')} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma - 1},$$

che rappresenta l'entalpia per unità di massa del fluido. Ciò implica che

$$B_{\text{isoentropico}} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma - 1} + \phi + \frac{1}{2}\, v^2 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \phi + \frac{1}{2}\, v^2. \tag{1}$$

L'Eq. (1) vale per tutti i tipi di gas barotropici, anche quelli non ideali[5].

---

[4]Nei fluidi barotropici, la pressione può essere espressa in funzione della sola densità. Quindi, le superfici a densità costante sono anche superfici a pressione costante. Inoltre, solo per quanto riguarda i gas perfetti, vale

$$\frac{p}{\rho} \propto T,$$

allora anche la temperatura è costante sulle stesse superfici. Per cultura, tutti i gas non barotropici sono detti *baroclinici*.

[5]Per i gas ideali, possiamo dire qualcosa di più. Dato che in essi valgono

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M} \quad \text{e} \quad c_p - c_v = nR,$$

dove M è la massa molare, mentre c_p e c_v sono i calori specifici per unità di massa a pressione e volume costante, la definizione di γ comporta che l'Eq. (1) può essere scritta come

$$B_{\text{isoentropico}} = c_p T + \phi + \frac{1}{2}\, v^2.$$

Esempio 3.2 (**Fluido isotermo**)**.** Questo caso è equivalente a considerare il precedente nel limite $\gamma \to 1$, ma non possiamo calcolarlo direttamente sul risultato finale a causa di una divergenza. Per un fluido isotermo vale

$$pV = cost. \quad \Longrightarrow \quad \frac{p}{\rho} = cost. \quad \Longrightarrow \quad p = p_0 \frac{\rho}{\rho_0},$$

che è una variante della legge dei gas perfetti. Segue che

$$\int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p'}{\rho(p')} = \frac{p_0}{\rho_0} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \quad \text{oppure} \quad \frac{p}{\rho} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right),$$

che comporta

$$B_{\text{isotermo}} = \frac{p}{\rho} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) + \phi + \frac{1}{2} v^2.$$

Potrebbe sembrare che ρ_0 sia un parametro di cui bisogna tener conto nei problemi, ma non è così. I motivi sono due.
Intanto, per le proprietà dei logaritmi, possiamo scrivere

$$B_{\text{isotermo}} = \frac{p}{\rho} \ln\left(\frac{1\,\text{Pa}}{\rho_0}\right) + \frac{p}{\rho} \ln\left(\frac{\rho}{1\,\text{Pa}}\right) + \phi + \frac{1}{2} v^2, \tag{2}$$

dove abbiamo moltiplicato e diviso per l'unità di misura della pressione nel SI perché gli argomenti delle funzioni trascendenti devono essere adimensionati. A questo punto, essendo p/ρ costante, ci accorgiamo che il primo termine è anch'esso costante, quindi può essere inglobato in B. In definitiva, l'Eq. (2) può essere riscritta come

$$B_{\text{isotermo}} = \frac{p}{\rho} \ln\left(\frac{\rho}{1\,\text{Pa}}\right) + \phi + \frac{1}{2} v^2,$$

senza alcuna perdita di generalità.
In secondo luogo, per quanto riguarda l'equazione di Bernoulli che confronta due punti A e B, possiamo considerare uno dei due, ad esempio B, come punto di riferimento:

$$\frac{p_A}{\rho_A} \ln\left(\frac{\rho_A}{\rho_B}\right) + \phi_A + \frac{1}{2} v_A^2 = \phi_B + \frac{1}{2} v_B^2.$$

In entrambi i casi ci siamo sbarazzati di p_0 e ρ_0.

Ricordate: nei problemi di Fluidodinamica, la maggior parte dei paradossi e delle inconsistenze che si incontrano sono causati da un uso improprio del teorema di Bernoulli. Tantissime volte capita di invocarlo dimenticandosi delle ipotesi che esso richiede: non bisogna stupirsi se poi qualcosa non torna. Ecco qualche esempio.

Esempio 3.3 (**Paradosso del fumatore**)**.** *Supponiamo che un fumatore stia guidando un'auto a velocità u costante, con i finestrini leggermente aperti. Dal punto di vista del fumatore, l'aria all'esterno dell'auto si muove ad una velocità maggiore rispetto all'aria all'interno. Secondo il teorema di Bernoulli, maggiore è la velocità, minore è la pressione. Pertanto, il fumo dovrebbe uscire fuori dall'auto perché il gas tende ad andare dove la pressione è minore. Ma secondo la relatività (anche quella galileiana), poiché qualsiasi sistema di riferimento inerziale è valido, una persona ferma a terra mentre l'auto passa vede che l'aria all'interno dell'auto si muove più velocemente di quella all'esterno, quindi, per lei la pressione all'interno dell'auto è inferiore rispetto a quella fuori. Questo significa che l'aria tenderebbe ad entrare nell'auto, mantenendo il fumo dentro. Ecco che abbiamo trovato un paradosso. Come si risolve? Il fumo rimane all'interno dell'auto o viene spinto fuori?*

Soluzione. L'inghippo sta nel fatto che per uno dei due osservatori il flusso non è stazionario! Per un osservatore solidale con l'auto, l'aria dentro di essa e l'aria dall'esterno costituiscono dei flussi stazionari: egli vede l'aria dentro ferma e l'aria fuori venirgli incontro alla velocità u. Questo vale **sempre**, per ogni istante temporale. Invece, quando l'auto passa, un osservatore posto a terra rileva un soffio d'aria che si smorza subito dopo. Inoltre, egli vede l'aria dentro l'auto occupare posizioni diverse durante lo scorrere del tempo perché l'auto si muove. Quindi, il teorema di Bernoulli può essere applicato solo nel sistema di riferimento solidale con l'auto. Allora, per lo stesso ragionamento fatto nel testo, il fumo esce fuori dall'auto.

Considerazione generale: quando il flusso di un fluido è stazionario per un osservatore in un certo sistema di riferimento, in generale non sarà stazionario per osservatori in sistemi di riferimento che sono in movimento rispetto al primo. In altre parole, la validità dell'equazione di Bernoulli in un sistema di riferimento non implica, in generale, che essa sia valida anche negli altri sistemi di riferimento[6]. Questo significa che **l'equazione di Bernoulli non è relativisticamente invariante**.

Esempio 3.4 (**Secchio rotante**). *Un recipiente cilindrico di raggio R, contenente volume V di liquido, ruota attorno al suo asse con velocità angolare ω. Trova la forma della superficie del pelo del liquido una volta che il sistema ha raggiunto il regime stazionario.*

Soluzione. Dopo molto tempo, a causa delle forze viscose tutto il liquido ruoterà rigidamente attorno all'asse del cilindro con velocità angolare ω. Una volta raggiunto questo stato, le forze viscose smettono di agire, quindi gli elementi fluidi non perdono più energia. Per simmetria, il liquido occuperà un certo volume di rotazione. Poniamoci sulla superficie del liquido.

Procedura sbagliata: il teorema di Bernoulli ci dice che la quantità

$$B = \frac{p(z,r)}{\rho} + \phi + \frac{1}{2}v^2(z,r) = \frac{p_0}{\rho} + gz + \frac{1}{2}\omega^2 r^2$$

è uniforme. Qui, $p = p_0$ è la pressione atmosferica, uniforme su tutta la superficie libera del liquido, mentre z e r sono due coordinate che descrivono, rispettivamente, la quota e la distanza dall'asse di rotazione. Isolando z dall'equazione precedente, si trova

$$z(r) = \frac{B - p_0}{\rho g} - \frac{\omega^2}{2g}\, r^2,$$

che descrive un paraboloide con la concavità rivolta verso il basso. Questo risultato è davvero contro ogni legge della Fisica: significherebbe che il liquido è maggiormente concentrato vicino all'asse o che, addirittura, fluttua in alto. Cosa abbiamo sbagliato? In questo caso, il flusso del liquido nel recipiente è rotazionale: le linee di flusso sono delle circonferenze centrate nell'asse di rotazione e appartenenti a piani orizzontali. Cercando la forma dell'intera superficie (e di tutte le superfici equipotenziali), abbiamo usato il teorema di Bernoulli nella sua forma forte, ma non potevamo farlo a causa dell'assenza dell'ipotesi di irrotazionalità del flusso. Possiamo usare solo la versione debole e dire che la quantità B scritta sopra è costante solo lungo le linee di flusso, che, come appena detto, sono caratterizzate da z e r costanti. Questo non porta a nulla, perché otteniamo l'uguaglianza $B = \textit{costante}$.

Procedura corretta. Il problema può essere risolto in due modi. Il primo è l'applicazione del diagramma di corpo libero su un piccolo elemento fluido, provate a farlo da soli. Il

[6] I casi in cui il teorema di Bernoulli è valido in più di un sistema di riferimento sono casi altamente simmetrici. Ad esempio, consideriamo un tubo dritto e infinito in cui scorre acqua. Sia un osservatore posto a terra che uno in moto con velocità parallela al tubo vedono sempre la stessa situazione stazionaria. Entrambi possono invocare il teorema di Bernoulli, ma trovano un risultato banale.

secondo sfrutta comunque l'invariante di Bernoulli! Ma com'è possibile? Non abbiamo appena mostrato che esso non porta a nulla? È vero, ma non porta a nulla nel sistema di riferimento in cui ci siamo posti. L'idea furba sta nel mettersi nel sistema di riferimento centrato in un punto qualsiasi dell'asse del cilindro e che ruota alla stessa velocità angolare del fluido. In tale sistema, il fluido appare fermo. Essendo fermo, il flusso è irrotazionale! A questo punto possiamo usare il teorema di Bernoulli nella sua forma forte e dire che

$$B' = \frac{p(z,r)}{\rho} + \phi' + \frac{1}{2}v'^2(z,r) = \frac{p_0}{\rho} + \left(gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2\right) + 0,$$

dove abbiamo usato il fatto che la la pressione, essendo una quantità scalare, ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento, la velocità di ogni punto è nulla e il potenziale è

$$\phi' = gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2,$$

cioè la somma dei potenziali gravitazionale e centrifugo. Essendo in un sistema di riferimento non inerziale, bisogna tener conto anche di quest'ultimo. Invece, la forza di Coriolis non dà alcun contributo perché $\vec{\omega} \times \vec{v}(z,r)$ è diretto radialmente ovunque. Dal teorema di Bernoulli segue che

$$z = \frac{B' - p_0}{\rho g} + \frac{\omega^2}{2g}\, r^2,$$

cioè un paraboloide con concavità rivolta verso l'alto, cioè nel modo corretto. La costante B' si trova dalla condizione sulla conservazione del volume:

$$V = \int_0^R \left(\frac{B' - p_0}{\rho g} + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right) 2\pi r \,\mathrm{d}r = \pi R^2 \left(\frac{B' - p_0}{\rho g} + \frac{\omega^2 R^2}{4g}\right).$$

La forma della superficie libera di liquido è, dunque,

$$z = \frac{V}{\pi R^2} + \frac{\omega^2}{4g}\left(2r^2 - R^2\right),$$

che è indipendente dalla densità. Notate che, se ω è molto grande, per $r = 0$ può succedere che z sia negativo. In questo caso il liquido non tocca affatto l'asse di rotazione ed è distribuito più verso le pareti del recipiente.

Esempio 3.5 (**Effetto Magnus fuorviante**). *Durante un tiro, un calciatore imprime una velocità angolare ω a un pallone di raggio R e massa m, che inizia a rototraslare in aria a velocità v. Escludendo la resistenza fluidodinamica e la forza peso, quanto vale la forza che il pallone avverte dovuta alla presenza dell'aria?*

Soluzione. Prima di procedere all'analisi, bisogna fare una premessa importantissima. Nella realtà, non si possono trascurare gli effetti dovuti alla viscosità: essa è responsabile della presenza dello strato limite, che si stacca continuamente dal retro della palla formando coppie di vortici. Questo fa sì che il flusso sia non-stazionario, turbolento e rotazionale... praticamente saltano quasi tutte le ipotesi del teorema di Bernoulli. Detto ciò, possiamo comunque provare a vedere cosa succede a ipotizzare che il flusso sia lindo e casto.

Supponiamo che la viscosità sia nulla e consideriamo una sfera che ruota ma non trasla: essa non ha alcun effetto sull'aria. In altre parole, dato che lo strato limite non esiste, l'aria non si accorge che la sfera sta ruotando, quindi quest'ultima non risente di alcuna forza. Nella stessa ipotesi, consideriamo una sfera che non ruota ma trasla verso destra a velocità

v: essa sposta l'aria come mostrato in Fig. 2 (*sinistra*). Per meglio dire, la figura mostra la situazione vista nel sistema di riferimento solidale alla sfera, in cui l'aria indisturbata, lontana dalla sfera, viaggia a velocità v ma verso sinistra. Quindi, in questo caso l'aria risente della presenza della sfera. Data la simmetria del sistema, la sfera non risente di alcuna forza. Se mettiamo assieme i due effetti, otteniamo che anche una sfera rototraslante non risente di alcuna forza. Dove stiamo sbagliando? Evidentemente, è necessaria la presenza dello strato limite! Quindi, è inutile fare conti in questo caso.

Proviamo a fare un qualcosa di ibrido, cioè supporre che ci sia un meccanismo che permetta la presenza dello strato limite ma senza considerare gli effetti di turbolenza legati al distacco. Questa non è una trattazione rigorosa, ma è meglio di niente. Dato che il pallone rototrasla, le diverse parti della sua superficie sono soggette a diversi valori della pressione, dovuti a diversi valori delle velocità relative degli elementi di aria. Questo fa sì che si generi una forza che tende a spostare il pallone verso le zone a pressione minore. Come troviamo questa forza? Potremmo pensare di applicare il teorema di Bernoulli, ma in quale delle due forme? E sopratutto, in quale sistema di riferimento è lecito applicarlo?

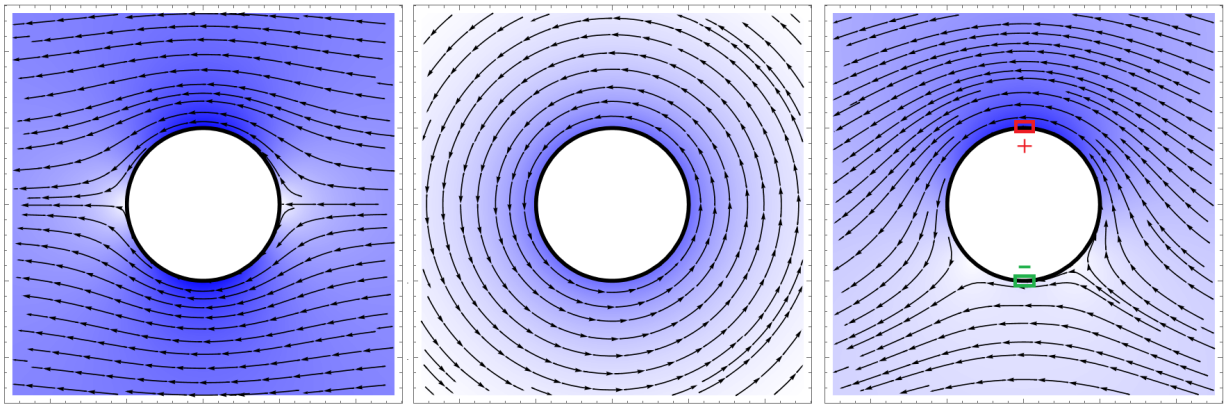

Figura 2: (*sinistra*) Linee di flusso nel sistema di riferimento solidale a una sfera che trasla verso destra. (*centro*) linee di flusso per una sfera che ruota in senso antiorario. (*destra*) linee di flusso per una che ha entrambi i movimenti delle precedenti, viste nel sistema di riferimento traslante ma non rotante.

Nel sistema di riferimento del campo da calcio, il flusso è sicuramente non stazionario perché cambia mentre il pallone trasla in aria, come nell'Esempio 3.3. Quindi, potremmo pensare di metterci nel sistema rotante centrato nel centro del pallone e solidale ad esso, ma anche in questo caso il flusso non è stazionario: un osservatore in quel sistema di riferimento vede un periodico alternarsi di flussi a velocità diversa. L'unico sistema in cui il flusso sembra essere stazionario è quello che trasla alla stessa velocità v del pallone ma che non ruota[7]. Però qui, come in tutti gli altri sistemi di riferimento, manca l'ipotesi di irrotazionalità: se la palla ruota, trascina con sé l'aria, quindi il campo di velocità acquista una circuitazione. Allora, potremmo pensare di doverci rassegnare con il teorema in forma debole e dire che, per due diverse linee di flusso che arrivano da molto lontano e tangono la palla agli antipodi (+) e (-), valgono rispettivamente

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_\pm + \frac{1}{2}\rho(v \pm \omega R)^2, \tag{3}$$

dove l'effetto dovuto alla differenza di quota non è conteggiato perché trascurabile. Dall'Eq. (3) si ricava

$$p_+ - p_- = -\rho v \omega R. \tag{4}$$

La forza non può essere ricavata moltiplicando per una qualche superficie perché, come si può capire dalla Fig. 2 (destra), il flusso non è simmetrico rispetto all'equatore.

[7]Questo vale solo se l'oggetto rotante è simmetrico per rotazioni, come le sfere.

Come già anticipato, ribadiamo che questa modellizzazione non è rigorosa, per diversi motivi. Intanto, abbiamo usato l'equazione di Bernoulli anche in presenza di viscosità, sfruttata per dire che la velocità agli estremi è quella dello strato limite. Inoltre, i vortici citati nella premessa sono strutture fluidodinamiche che evolvono nel tempo: si staccano dal pallone e rimangono indietro! Quindi, anche se a prima vista sembrerebbe che il flusso sia stazionario nel sistema traslante con la palla, in realtà non lo è! La presenza di vortici dovuti ad instabilità rende il flusso non stazionario in ogni sistema di riferimento immaginabile[8]. Quindi, non possiamo proprio applicare il teorema di Bernoulli, ma libri lo fanno comunque. Inoltre, stimano la forza agente sulla sfera moltiplicando l'Eq. (4) per πR^2. La dipendenza funzionale dalle grandezze in gioco risulta corretta, ma il valore della costante di proporzionalità è infondato. Esso va trovato sperimentalmente!

Cambiamo approccio: nel prossimo esempio proveremo a quantificare l'effetto Magnus tramite l'analisi dimensionale.

Esempio 3.6 (**Effetto Magnus**, tratto dal concorso di ammissione della SNS 2015)**.** *Una palla da baseball può essere lanciata con una certa velocità angolare attorno al proprio asse per ottenere la cosiddetta "palla curva", schematizzata in Fig. 3. Stima la forza laterale F_l e la deflessione d usando l'analisi dimensionale e i dati forniti. Assumi che la forza F_l sia direttamente proporzionale a ω e che la costante di proporzionalità adimensionale sia dell'ordine dell'unità.*

$$m = 0.145\,\mathrm{kg}, \qquad R = 3.7\,\mathrm{cm}, \qquad v = 36\,\mathrm{m/s},$$
$$\omega = 227\,\mathrm{rad/s}, \qquad L = 18\,\mathrm{m}, \qquad \rho_a = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}.$$

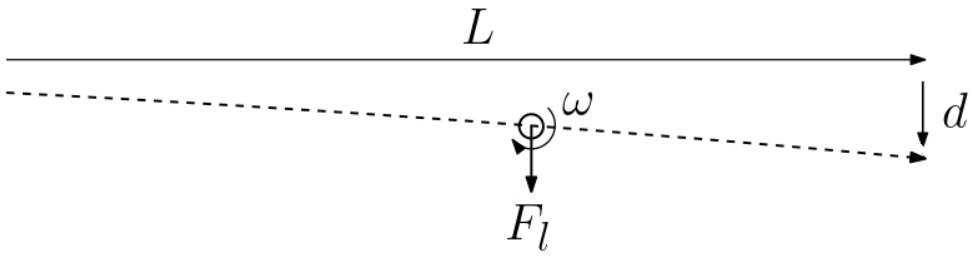

Figura 3: Traiettoria della palla da baseball, vista dall'alto.

Soluzione. La forza F_l è sicuramente indipendente dalla massa della palla e dalla distanza percorsa perché è una forza dovuta al fluido in cui il corpo si muove. Usando l'ipotesi che F_l sia direttamente proporzionale a ω, data nel testo, si ha

$$F_l = C\rho_a^\alpha\,\omega\,v^\beta R^\gamma,$$

che, a livello dimensionale, diventa

$$\frac{[M]\,[L]}{[T]^2} = \left(\frac{[M]}{[L]^3}\right)^\alpha \frac{1}{[T]} \left(\frac{[L]}{[T]}\right)^\beta [L]^\gamma\,,$$

da cui $\alpha = 1$, $\beta = 1$ e $\gamma = 3$. In conclusione, dato che il testo ci suggerisce che $C \approx 1$, troviamo

$$F_l \approx \rho_a\,\omega\,vR^3 \approx 0.5\,\mathrm{N}.$$

[8]Invece, la presenza di vortici stazionari come nei mulinelli d'acqua o nell'Esempio 3.4 rende il flusso rotazionale, ma comunque stazionario. In questi casi, si può applicare il teorema di Bernoulli in forma debole.

Dato che ci si aspetta una piccola deflessione, si può assumere che la forza laterale sia sempre perpendicolare alla direzione iniziale di volo. La palla segue una traiettoria parabolica e la deflessione è data da

$$d \approx \frac{1}{2} a_l \, t^2,$$

dove

$$a_l = \frac{F_l}{m} \qquad \text{e} \qquad t = \frac{L}{v}.$$

Il risultato finale è

$$d \approx \frac{F_l L^2}{2mv^2} = \frac{\rho_a \, \omega L^2 R^3}{2mv} = 0.44 \, \text{m}.$$

Potevamo trovare un risultato simile usando solo l'analisi dimensionale? No! Ci sarebbero troppe incognite e poche equazioni.

Esempio 3.7 (**Svuotamento di un secchio**). *Calcola il tempo di svuotamento di un secchio cilindrico di altezza h_0 e area di base A, supponendo che la sezione del foro alla base sia $S \ll A$.*

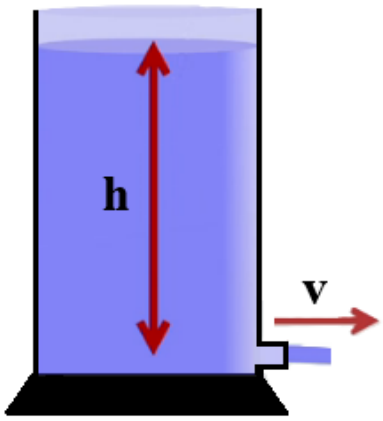

Figura 4: Secchio cilindrico con foro.

Soluzione. Data l'ipotesi sulla sezione del tubo, il flusso può essere considerato stazionario. Detta v la velocità dell'acqua non appena esce dal foro, il teorema di Bernoulli implica

$$v = \sqrt{2gh},$$

dove h è l'altezza del liquido. La velocità del pelo del liquido è legata alla portata in uscita, che è l'opposto della derivata del volume di liquido contenuto nel secchio

$$vS = -A \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}.$$

Sostituendo nella legge di Torricelli, troviamo

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{S}{A}\sqrt{2gh},$$

che è un'equazione differenziale con soluzione

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{St}{2A}\sqrt{2g} \right)^2.$$

Dunque, il tempo di svuotamento vale

$$t = \frac{A}{S}\sqrt{\frac{2h_0}{g}},$$

che è estremamente più grande del tempo di caduta di un grave che parte da fermo da un'altezza h_0.

Il prossimo esempio mostra come svuotamento e riempimento non siano fenomeni speculari. Infatti, se riavvolgessimo il tempo nell'esercizio precedente, potrebbe sembrare di riuscire a descrivere la situazione in cui il contenitore si riempie dal basso. In realtà, se si prova a riempire un contenitore in questo modo, il flusso dentro il contenitore non è mai laminare, neanche per piccole velocità. In gergo, si dice che *il riempimento non è il time-reversal dello svuotamento.*

Esempio 3.8 (**Fontana di Erone**, tratto da un allenamento della Gara a Squadre di Fisica 2025)**.** *In Fig. 5 è illustrata una schematizzazione della fontana di Erone, dispositivo ideato dal famoso inventore alessandrino attorno al II secolo d.C. Il vano posto in alto è aperto superiormente e comunica con quello inferiore tramite due sottili condotti verticali, di sezioni trascurabili rispetto a quelle dei contenitori. Le distanze tra le estremità inferiori dei condotti e il fondo del vano inferiore sono molto piccole in confronto alle altezze indicate in figura. Le regioni indicate con A, B e C contengono acqua, mentre D contiene aria a pressione leggermente maggiore di quella atmosferica. In un certo momento, le altezze schematizzate in figura valgono* $h_1 = 38.5\,\text{cm}$, $h_2 = 3.3\,\text{cm}$ *e* $h_3 = 12.7\,\text{cm}$ *e, nei condotti verticali, la velocità di salita risulta inferiore del* 7% *rispetto alla velocità di discesa. Trascurando gli effetti dovuti alla viscosità dell'acqua, quanto vale l'altezza h del getto d'acqua in quel momento?*

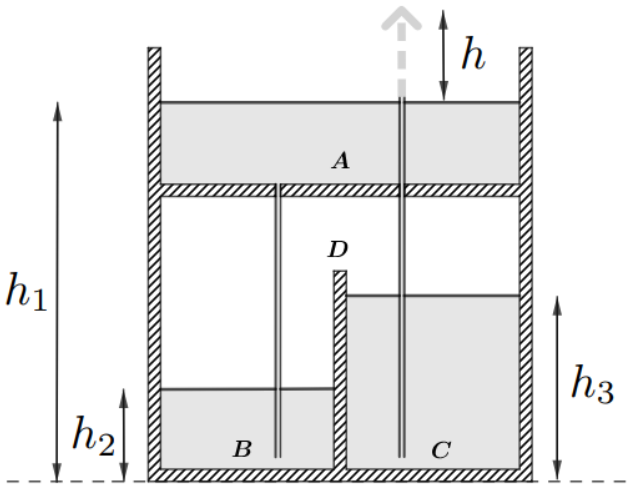

Figura 5: Schematizzazione della fontana di Erone.

Soluzione. Indichiamo con v_1 e v_2 i moduli delle velocità dell'acqua, rispettivamente in discesa e in salita, nei due condotti verticali. La pressione dell'aria contenuta nel vano D è $p_1 > p_0$, mentre ρ è la densità dell'acqua.

Applichiamo l'equazione di Bernoulli ai due flussi in figura: a sinistra, considerando la superficie libera del liquido in A e l'apertura inferiore del condotto verticale in B, e a destra, considerando la parte superiore del getto sopra A e la superficie libera dell'acqua in C. Si trova

$$\begin{cases} p_0 + \rho g h_1 = p_1 + \rho g h_2 + \dfrac{1}{2}\rho v_1^2, \\ p_1 + \rho g h_3 = p_0 + \rho g (h_1 + h). \end{cases}$$

Nota: a sinistra è sbagliato scrivere l'equazione di Bernoulli considerando la superficie libera del liquido in A e la superficie libera del liquido in B, come per il ramo di destra. Infatti, si otterrebbe

$$p_0 + \rho g h_1 = p_1 + \rho g h_2,$$

ma si commetterebbe un errore molto grave. Bisogna ricordarsi che l'equazione di Bernoulli vale solo sotto certe ipotesi, tra cui l'esistenza delle linee di flusso. La differenza principale tra i flussi negli scompartimenti B e C (solo negli scompartimenti, non nei tubi) è che nel primo non sono individuabili delle linee di flusso, mentre nel secondo sì. Questo è dovuto al fatto che B si sta riempiendo, quindi l'acqua che fuoriesce dalla parte inferiore del condotto di sinistra "urta" l'acqua circostante e si distribuisce in modo non ordinato. Questa non è nient'altro che turbolenza, che può caratterizzare un sistema anche in assenza di viscosità. Al contrario, C si sta svuotando, quindi in esso l'acqua fluisce verso l'estremità del condotto in modo "ordinato", seguendo delle linee di flusso ben precise. In definitiva, in C possiamo estendere la validità dell'equazione di Bernoulli sino alla superficie libera dell'acqua. Invece, in B dobbiamo limitarci all'estremità inferiore del condotto, posizionata a un'altezza praticamente nulla, in cui la pressione è data dalla legge di Stevino. Inoltre, la velocità nel punto apicale del getto è nulla e, data l'ipotesi sulle sezioni, possiamo trascurare la velocità dell'acqua sulle superfici libere.
Sommando membro a membro e facendo le opportune semplificazioni, si ottiene

$$v_1^2 = 2g(h_3 - h_2 - h).$$

Imponendo che $v_2^2 = 2gh$, per la conservazione dell'energia meccanica, e scrivendo v_2 come $v_2 = kv_1$ con $k = 93/100$, si ricava

$$h = k^2(h_3 - h_2 - h) \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{k^2(h_3 - h_2)}{1 + k^2} \approx 4.4\,\text{cm}.$$

Esempio 3.9 (**Legge di Betz**)**.** I venti non sono altro che masse d'aria che si spostano prevalentemente in senso orizzontale da zone di alta pressione (anticicloni) a zone di bassa pressione (cicloni). A oggi, essi costituiscono una grande sorgente di energia. Per estrarre quest'energia dall'aria, vengono utilizzate delle turbine a vento di diversi tipi. Le turbine convertono l'energia cinetica dell'aria in energia cinetica rotazionale, la quale diventerà energia elettrica per mezzo di alternatori. Cerchiamo di capire quanta energia può essere estratta dall'aria con una una turbina ad asse orizzontale.

Per una trattazione analitica, sono necessarie le ipotesi simili a quelle del teorema di Bernoulli:

- flusso laminare, stazionario e irrotazionale;
- aria incomprimibile;
- lontano dalla turbina, la pressione è quella atmosferica.

Disclaimer: questo conto non è rigoroso. Infatti, nella realtà, il flusso è turbolento in prossimità della turbina: le linee di flusso si rompono. Però, gli ingegneri non lo sanno e applicano lo stesso il teorema di Bernoulli.

Facendo riferimento alla Fig. 6, applichiamo l'equazione di Bernoulli sulla stessa linea di flusso, in assenza della turbina:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2.$$

Invece, in presenza della turbina, parte dell'energia cinetica viene sottratta all'aria, quindi il bilancio energetico si legge

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + k,$$

dove k rappresenta l'energia trasferita alla turbina per unità di volume d'aria. Attenzione! **Questa non è l'equazione di Bernoulli**! Essa rappresenta solo un bilancio energetico.

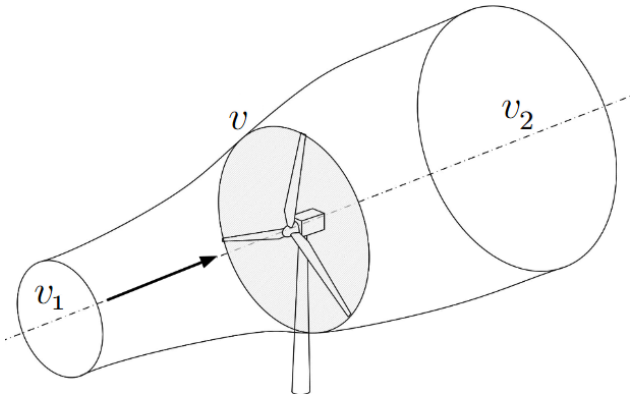

Figura 6: Schematizzazione del tubo di flusso di aria e della turbina.

Considerando $h_1 = h_2$ e confrontando due sezioni molto lontane dalla turbina, in modo che $p_1 = p_2 = p_0$, otteniamo che l'energia per unità di volume sottratta all'aria vale

$$k = \frac{1}{2}\rho\left(v_1^2 - v_2^2\right).$$

La potenza estratta dall'aria non è altro che l'energia per unità di volume per il volume di aria che attraversa la pala eolica nell'unità di tempo, quindi

$$P = kSv = \frac{1}{2}\rho S v\left(v_1^2 - v_2^2\right). \tag{5}$$

D'altro canto, la potenza estratta dal rotore è data dal prodotto tra la forza che il flusso di aria esercita sul rotore e la velocità v del vento in corrispondenza della turbina:

$$P = Fv = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\left(v_1 - v_2\right)v = \rho S v^2\left(v_1 - v_2\right), \tag{6}$$

dove abbiamo usato l'equazione di continuità $\rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2 = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ e S è approssimativamente la superficie trasversale della turbina. Uguagliando le espressioni per la potenza in Eq. (5) e Eq. (6), otteniamo

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Possiamo quindi riscrivere la potenza estratta come

$$P = \frac{1}{4}\rho S\left(v_1 + v_2\right)^2\left(v_1 - v_2\right).$$

Definiamo il coefficiente di prestazione come il rapporto tra la potenza estratta e la potenza dell'aria in assenza della turbina, cioè

$$c_p = \frac{P}{P_0} = \frac{\frac{1}{4}\rho S\left(v_1 + v_2\right)^2\left(v_1 - v_2\right)}{\frac{1}{2}\rho S v_1^3} = \frac{1}{2}(1+\beta)^2(1-\beta),$$

dove abbiamo definito $\beta \equiv v_2/v_1$. Calcoliamo il massimo di questa funzione facendone la derivata prima e ponendola pari a zero:

$$\frac{\mathrm{d}c_p}{\mathrm{d}\beta} = \frac{1}{2}\left(2(1+\beta)(1-\beta) - (1+\beta)^2\right) = 0,$$

la cui soluzione è $\beta = 1/3$. Dunque, il massimo valore del coefficiente di prestazione è $c_p = 16/27 \approx 0,59$. Ciò significa che, teoricamente, la massima potenza estraibile dall'aria è circa il 59% di quella disponibile. Questo risultato è noto come *limite di Betz*.

---

4 Equazione di Bernoulli non stazionaria

Per ricavare la generalizzazione dell'equazione di Bernoulli nel caso non stazionario, bisogna ripartire dall'equazione di Eulero per fluidi non viscosi, che deriva dalla conservazione della quantità di moto fluida. Guardando una singola linea di flusso, essa si legge

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\,\frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\partial \phi}{\partial s},$$

dove s è la coordinata curvilinea che descrive la posizione lungo la linea di flusso. Integrando tra due punti A e B appartenenti alla linea di flusso, si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{s_A}^{s_B} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\,\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial s}\right)\mathrm{d}s = \\ &= \int_{s_A}^{s_B} \frac{\partial v}{\partial t}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\left(v_B^2 - v_A^2\right) + \int_{p_A}^{p_B} \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} + \phi_B - \phi_A, \end{aligned}$$

dove, al solito, il terzo addendo tiene conto della comprimibilità del fluido, assunto barotropico. Per andare avanti, bisogna considerare degli esempi specifici: l'integrale che contiene la derivata temporale della velocità va calcolato conoscendo la forma delle linee di flusso e la velocità del fluido su di esse.

Esempio 4.1 (**Generalizzazione della legge di Torricelli**)**.** La velocità di fuoriuscita dell'acqua da un piccolo foro sul fondo di un contenitore cilindrico può essere descritta dalla legge di Torricelli

$$v_{\text{fuoriuscita}} = \sqrt{2gh} \tag{7}$$

dove h è la quota del pelo dell'acqua nel contenitore. Una versione accurata di questa legge è

$$v_{\text{fuoriuscita}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{S_B}{S_A}\right)^2}}, \tag{8}$$

dove S_A è la sezione trasversale del contenitore cilindrico e S_B è la sezione del foro. Il problema è che queste relazioni vengono ricavate tramite il teorema di Bernoulli in forma forte per flussi stazionari, quindi valgono solo per fori piccoli. Tuttavia, se immaginassimo di fare un foro sul fondo del serbatoio grande quanto l'intera base del cilindro, l'acqua cadrebbe con accelerazione g dovuta alla gravità, quindi con velocità data da $\sqrt{2g(h_0 - h)}$, dove h_0 è l'altezza iniziale dell'acqua nel contenitore. Notate che questo risultato tiene conto delle condizioni iniziali e differisce abbondantemente da $\sqrt{2gh}$, dove non c'è alcuna traccia delle condizioni iniziali. Usando l'equazione di Bernoulli per flussi non stazionari, proviamo a generalizzare la legge di Torricelli per buchi di larghezza arbitraria, in modo ritrovare entrambi

i limiti, cioè buco di area massima e buco piccolissimo.

Supponendo che l'acqua sia incomprimibile e non viscosa e che il flusso sia irrotazionale ovunque, l'equazione di Bernoulli non-stazionaria diventa

$$\frac{1}{2}\,v_A^2 + \frac{p_A}{\rho} + \phi_A = \int_{s_A}^{s_B} \frac{\partial v}{\partial t}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\,v_B^2 + \frac{p_B}{\rho} + \phi_B.$$

Scegliamo il punto A sulla superficie del pelo libero dell'acqua e il punto B in corrispondenza del foro sul fondo. La pressione in entrambi i punti è pari a quella atmosferica, mentre le velocità sono legate tra di loro tramite la conservazione della portata $v_A S_A = v_B S_B$. Inoltre, visto che compare anche la prima potenza della velocità e che il potenziale gravitazionale detta una direzione il cui segno non può essere preso a caso, è necessario specificare che queste velocità sono negative, cioè rivolte verso il basso. Inoltre, per andare avanti c'è bisogno di assumere che le linee di flusso dentro il flusso siano pressoché verticali dentro il contenitore, in modo da poter scrivere $v_A = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ e non solo: tutti i punti all'interno del fluido si muoveranno alla stessa velocità. Ecco perché serve l'ipotesi di irrotazionalità: è necessario coinvolgere tutto il fluido e non una sola linea di flusso! Sfruttando il fatto che le linee di flusso sono segmenti verticali, possiamo scrivere

$$\int_{s_A}^{s_B} \frac{\partial v}{\partial t}\,\mathrm{d}s = \int_{h(t)}^{0} \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}z.$$

Dato che, per le considerazioni appena fatte, v è omogenea in tutto il flusso interno, allora la funzione integranda è costante e può esser portata fuori dall'integrale. Segue che

$$\int_{s_A}^{s_B} \frac{\partial v}{\partial t}\,\mathrm{d}s = -\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2}\,h(t).$$

L'equazione di Bernoulli non stazionaria diventa

$$\begin{aligned} -\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2}\,h(t) &= \frac{1}{2}\,v_A^2 - \frac{1}{2}\,v_B^2 + \phi_A - \phi_B = \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{S_B}{S_A}\right)^2 - 1\right] v_B^2(h(t)) + gh(t). \end{aligned}$$

In questa equazione compaiono tre variabili: v_B, h e t. Possiamo, però, sfruttare nuovamente la conservazione della portata per trovare

$$-\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2}\,h(t) = -\frac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}t}\,h(t) = \left(\frac{S_B}{S_A}\right)^2 \frac{\mathrm{d}v_B^2}{\mathrm{d}h}\,\frac{h}{2}.$$

L'equazione differenziale da risolvere è

$$\left(\frac{S_B}{S_A}\right)^2 \frac{\mathrm{d}v_B^2}{\mathrm{d}h}\,\frac{h}{2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{S_B}{S_A}\right)^2 - 1\right] v_B^2(h) + gh = 0,$$

con la condizione iniziale

$$v_B(h = h_0) = 0.$$

La soluzione dell'equazione è

$$v_B(h) = \sqrt{\frac{2gh}{2\alpha - 1}\left[\left(\frac{h}{h_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}-2} - 1\right]}, \qquad (0 \le h \le h_0) \tag{9}$$

dove $\alpha \equiv \left(S_B/S_A\right)^2$. Nei casi limite $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$, essa si riduce rispettivamente a

$$v_B(h, \alpha = 0) = \sqrt{2gh}, \qquad v_B(h, \alpha = 1) = \sqrt{2g\,(h_0 - h)}.$$

Per $\alpha = 0$ otteniamo la legge di Torricelli, rigorosamente valida solo per buchi piccoli! Nel caso $\alpha = 1$, cioè il caso in cui il foro di uscita è grande quanto l'intera base del recipiente cilindrico, ritroviamo la legge della caduta libera. Tutto torna! Nelle figure (7), (8) e (9) sono mostrati tre casi relativi alla stessa configurazione, ma con buchi di grandezza diversa. I tre colori che caratterizzano le funzioni nei grafici sono relativi all'Eq. (7) (azzurro), (8) (rosso) e (9) (verde).

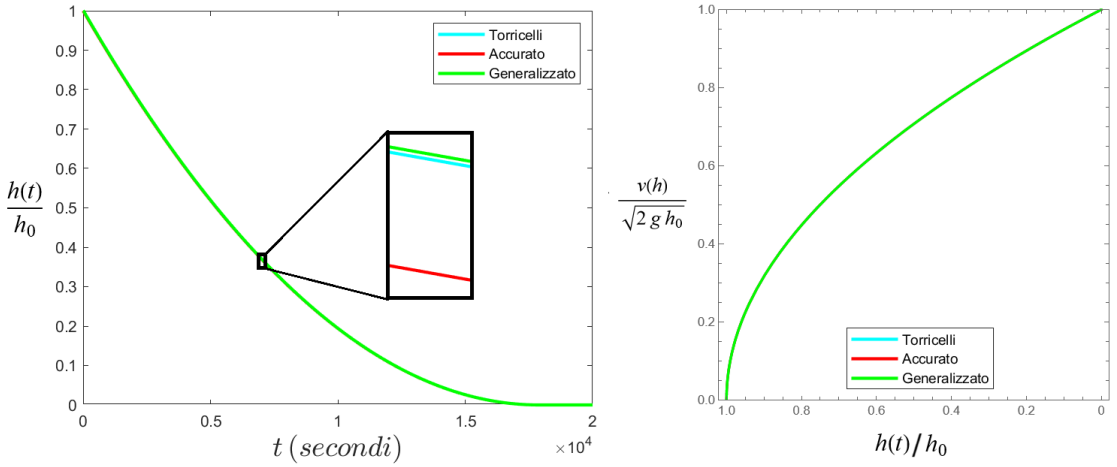

Figura 7: Svuotamento di un contenitore cilindrico con $h_0 = 1\,\mathrm{m}$, raggio di base $R = 20\,\mathrm{cm}$ e $\alpha \approx 0$.

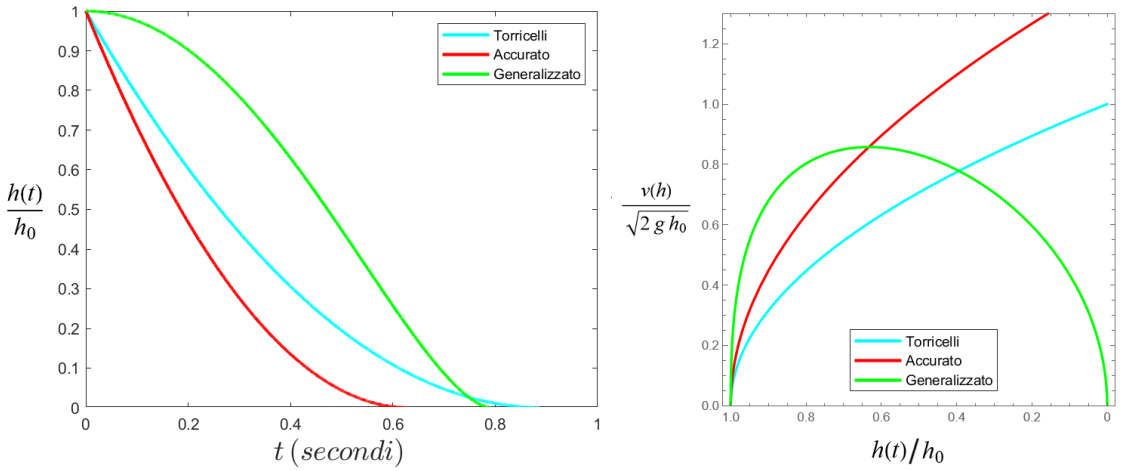

Figura 8: Svuotamento di un contenitore cilindrico con $h_0 = 1\,\mathrm{m}$, raggio di base $R = 20\,\mathrm{cm}$ e $\alpha = 0.5$.

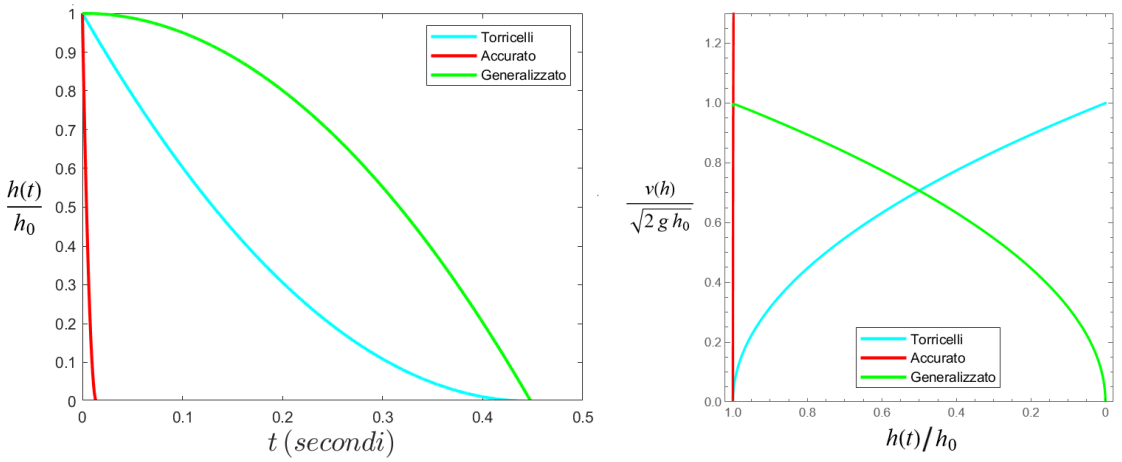

Figura 9: Svuotamento di un contenitore cilindrico con $h_0 = 1\,\text{m}$, raggio di base $R = 20\,\text{cm}$ e $\alpha \approx 1$.

5 Problemi

Problema 5.1. Una diga di larghezza L sfrutta l'acqua di un lago per produrre energia elettrica. Se l'acqua bagna la diga fino all'altezza H, quanto vale il modulo della forza a cui essa è soggetta?

Problema 5.2. Calcola il tempo di svuotamento di un secchio conico di altezza h_0 e raggio di base R, supponendo che la sezione del foro sia $S \ll R^2$. L'approssimazione della legge di Torricelli è sempre valida in questo caso?

Problema 5.3. Una bolla d'aria viene immessa alla base di un cilindro chiuso, alto 10 m e pieno d'acqua. Al momento dell'immissione della bolla, la pressione sul fondo del cilindro è 1.1 atm. La bolla inizia a salire fino a quando non raggiunge la sommità del cilindro. Quanto vale adesso la pressione sul fondo dopo la risalita?

Problema 5.4. Un palloncino si trova dentro un camion che a un certo punto accelera in avanti. Cosa succede al palloncino nel sistema di riferimento del camion?

Problema 5.5. Una piccola sfera di ferro di volume V affonda a velocità costante v in un recipiente chiuso completamente riempito di acqua. Qual è la quantità di moto totale dell'acqua? Il contenitore si trova su un tavolo, durante la discesa della sferetta che forza esercita il tavolo su di esso?

Problema 5.6. Un carrello con dell'acqua all'interno si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione $a\hat{x}$. Trova come si dispone l'acqua.

Problema 5.7. Si consideri il problema di galleggiamento di una nave in un bacino di carenaggio, semplificato nei seguenti termini: la vasca sia un parallelepipedo retto di larghezza a e lunghezza b e la nave sia un prisma retto della stessa lunghezza con base triangolare equilatera di lato $a/2$ e densità uniforme δ di poco inferiore a quella dell'acqua. Si supponga, inoltre, che la faccia superiore del prisma sia orizzontale quando esso galleggia. Si calcoli il minimo volume di acqua che bisogna versare nella vasca per far galleggiare la nave.

Problema 5.8. Determina che forma deve avere un recipiente a simmetria cilindrica in modo che in esso il livello dell'acqua si abbassi a velocità costante se sul fondo viene praticato un foro di dimensioni molto piccole.

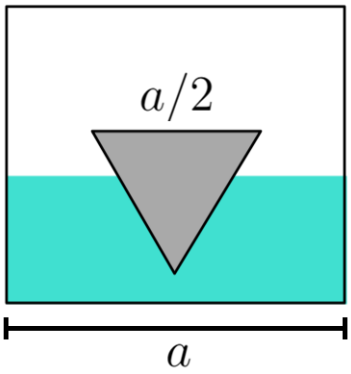

Figura 10: Sezione trasversale del bacino di carenaggio.

Problema 5.9. Un secchio cilindrico di raggio R ed altezza h è riempito di un liquido di densità ρ. Sia h_0 l'altezza del fluido nel secchio. Il secchio viene messo in rotazione attorno al suo asse a velocità costante ω e, dopo un breve periodo di transizione, raggiunge lo stato stazionario. Trovare h_M e h_m, rispettivamente le altezze massima e minima della superficie del fluido rispetto alla base del cilindro. Determinare la pressione $p(l)$ sulla superficie del secchio cilindrico ad altezza l dalla sua base. Determinare, inoltre, la pressione $p_0(l)$ nei punti dell'asse di rotazione tali che $l < h_m$ e mostrare che il rapporto

$$\frac{p(l) - p_0(l)}{h_M - h_m}$$

è indipendente da ω, R, h_m e l.

Problema 5.10. Sul fondo di un contenitore pieno d'acqua c'è un foro circolare di raggio r, sigillato da una sfera di massa m e raggio $R > r$. L'altezza dell'acqua nel contenitore viene ridotta lentamente fino a quando la sfera si stacca dal fondo. Trova il valore dell'altezza h_0 per cui ciò succede.