SCUOLA SUPERIORE DI CATANIA

Dispense

Stage di preparazione per i Campionati Nazionali di Fisica

Elettrostatica

Daniele Battesimo Provenzano

ANNO ACCADEMICO 2022-2023

Indice

1 Basi dell'Elettrostatica **2**
1.1 Forza e campo di una carica puntiforme . . . 2
1.2 Intermezzo: campi radiali e centrali . . . 2
1.3 Il potenziale elettrostatico . . . 3
1.4 Principio di sovrapposizione . . . 4
1.5 Legge di Gauss . . . 4
1.6 Calcolo di campo e potenziale: ricapitoliamo . . . 7
1.7 Energia potenziale elettrostatica . . . 7
1.8 Dipolo elettrico . . . 10

2 Conduttori **12**
2.1 Definizioni e proprietà generali . . . 12
2.2 Condensatori . . . 14
2.2.1 Energia immagazzinata in un condensatore . . . 16
2.2.2 Condensatori nei circuiti elettrici . . . 17

3 Campi elettrici nella materia **17**
3.1 Introduzione alla polarizzazione . . . 17
3.1.1 La miglior definizione di campo elettrico . . . 18
3.2 Condizioni di raccordo . . . 19
3.3 Energia elettrostatica nella materia . . . 20
3.3.1 Forza elettrostatica nella materia . . . 20

4 Problemi **22**

5 Soluzioni **24**

1 Basi dell'Elettrostatica

1.1 Forza e campo di una carica puntiforme

Le cariche elettriche ferme si comportano in modo molto simile alle masse in gravitazione Newtoniana. La legge che descrive la forza di attrazione/repulsione causata dalla presenza di una carica q_1 ed avvertita da una carica q_2 (ferme l'una rispetto all'altra) vale

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12},$$

dove $\hat{r}_{12}$ è il versore che indica la direzione ed il verso della forza (la direzione è la retta che congiunge le due cariche, il verso è quello che va da q_1 a q_2) ed ϵ_0 è la permittività dielettrica del vuoto. Si noti che questa forza obbedisce al terzo principio della dinamica ($\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$) ed è una forza *radiale*, in particolare *centrale* (come la forza di gravità). Nel prossimo paragrafo capiremo meglio qual'è la differenza tra questi due termini.
Se abbiamo un sistema di cariche fisse nello spazio ed introduciamo una carica di prova q_0, essa avvertirà una forza $\vec{F}$. A partire da questa forza, definiamo il campo elettrico come

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}.$$

Il campo elettrico non dipende dalla carica q_0 e rimane costante nel tempo se le altre cariche rimangono ferme.

1.2 Intermezzo: campi radiali e centrali

Quasi in ogni branca della fisica compaiono delle grandezze vettoriali dette *campi*. Il campo gravitazionale, il campo elettrico ed il campo magnetico sono campi che interagiscono con la materia (masse o cariche) e da questa interazione nasce una forza (forza gravitazionale, forza elettrica, forza di Lorentz...). Esistono altri campi che non sono per forza legati alla generazione di una forza, come il campo di velocità in fluidodinamica.
Siamo interessati a trovare delle qualità particolari dei campi, per le quali possiamo garantire la conservazione di quantità fisiche notevoli, come l'energia ed il momento angolare.
Diciamo che un campo di forza è *radiale* se può essere scritto nella seguente forma

$$\vec{F} = f(\vec{r})\hat{r}.$$

In altre parole, un campo di forza è radiale solo se, in ogni punto dello spazio, esso è diretto lungo la congiungente *punto-origine*, descritta dal versore $\hat{r}$. Possiamo già mostrare che il momento angolare dei corpi soggetti a tali forze si conserva. Consideriamo la derivata del momento angolare di un corpo di massa m rispetto al tempo.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{r}\times\vec{v})}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{v} + m\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{v}\times\vec{v} + \vec{r}\times\vec{F},$$

dove abbiamo usato la regola di derivazione del prodotto, $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \equiv \vec{v}$ ed il secondo principio della dinamica $m\vec{a} = \vec{F}$. Il primo addendo è sempre nullo perché il prodotto vettoriale

di un vettore per se stesso è nullo, il secondo addendo è nullo solo per i campi radiali ($\vec{r} \times \hat{r} = 0$). Quindi, per i campi radiali, il momento angolare si conserva!
Diciamo che un campo di forza è *centrale* se può essere scritto nella seguente forma

$$\vec{F} = f(r)\hat{r}.$$

In altre parole, un campo di forza è centrale solo se, oltre ad essere radiale, ha anche simmetria sferica. Notiamo che i campi radiali dipendono dal vettore $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, mentre quelli centrali solamente dal modulo dello stesso $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, quindi sono un sottoinsieme di quelli radiali. In altre parole, se un campo è centrale, allora è sicuramente radiale. Se un campo è radiale, non è detto che sia centrale. Esempi di campi centrali (e quindi radiali) sono il campo gravitazionale generato da una massa puntiforme ed il campo elettrostatico generato da una carica puntiforme. Un esempio di campo radiale ma non centrale è il campo elettrico generato da una carica puntiforme in moto rettilineo uniforme.
Nei campi centrali, oltre al momento angolare, si conserva l'energia dei corpi che si muovono al suo interno. Se più campi centrali vengono sovrapposti (come quando si hanno tante cariche fisse nello spazio, in posizioni casuali), il campo risultante non è più centrale, ma **l'energia si conserva lo stesso**. In questo caso, il campo viene detto **conservativo**. Purtroppo, non possiamo dire la stessa cosa per il momento angolare. Il problema sta nel fatto che $\vec{L}$ è una quantità vettoriale (mentre l'energia è scalare) e, inoltre, dipende dalla scelta di un polo. Comunque, nel caso fortunato in cui il campo risultante dalla sovrapposizione di tanti campi centrali è centrale, possiamo affermare che $\vec{L}$ si conserva.

1.3 Il potenziale elettrostatico

Il campo elettrostatico è un campo conservativo[1]. Di conseguenza, è possibile definire l'energia potenziale elettrica di una carica introdotta nel sistema.

$$U(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r},$$

dove $\vec{F}$ è la forza complessiva dovuta alle altre cariche. Per sistemi con distribuzioni di carica localizzate, l'energia potenziale (e, conseguentemente, il potenziale) è nulla all'infinito. Questo non è detto che valga per distribuzioni illimitate. Per un sistema formato da due cariche poste a distanza d, l'energia elettrostatica vale

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d}.$$

Avendo precedentemente definito $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$, possiamo definire il potenziale elettrostatico come

$$V(\vec{r}) \equiv \frac{U(\vec{r})}{q_0} = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

Quest'ultima quantità è di fondamentale importanza nella trattazione della teoria dei circuiti. Teniamo a mente che, per minimizzare l'energia, le cariche negative tendono

[1] È doveroso precisare che, affinché il campo elettrico sia conservativo, è necessario che non ci siano campi magnetici variabili.

a spostarsi verso zone a potenziale maggiore, mentre le cariche positive tendono ad spostarsi verso zone a potenziale minore. Il potenziale di una carica posta nell'origine vale

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

1.4 Principio di sovrapposizione

Cosa succede se in un sistema ci sono più di due cariche che interagiscono? Consideriamo un sistema formato da N cariche in posizioni fissate. Introduciamo una carica di prova nel sistema. La forza elettrostatica che agisce su quest'ultima è

$$\vec{F}_{tot}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i,$$

dove $\vec{F}_i$ è la forza che agisce sulla carica di prova, dovuta alla presenza della carica fissa i-esima. Quindi la forza totale è la somma vettoriale delle singole forze. Questo è, in formule, il principio di sovrapposizione! Lo stesso vale per l'energia potenziale di interazione tra cariche

$$U_{tot}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} U_i.$$

Dividendo le ultime due equazioni per la carica di prova, otteniamo

$$\vec{E}_{tot}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i,$$

$$V_{tot}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} V_i,$$

quindi il principio di sovrapposizione vale per tutte e quattro le grandezze che abbiamo introdotto fino ad adesso. Non vale per grandezze come l'energia elettrostatica, perché, come vedremo, essa è proporzionale al quadrato del campo elettrico.

1.5 Legge di Gauss

Una delle leggi più importanti dell'elettrostatica è il teorema di Gauss, la quale lega il flusso del campo elettrico alle cariche:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{\text{int}}.$$

In parole povere, data una qualunque superficie **chiusa**, il flusso del campo elettrico attraverso la superficie è direttamente proporzionale alla quantità di carica racchiusa dalla superficie. Questa relazione è valida nel caso in cui ci troviamo nel vuoto. Se ci troviamo in un mezzo materiale, basta sostituire ϵ_0 con $\epsilon_0\epsilon_r$, dove ϵ_r è la permittività dielettrica relativa.

Esempio 1.1 (Ancora campo elettrico di una carica puntiforme)**.** La più semplice applicazione del teorema di Gauss è il calcolo del capo elettrico di una carica puntiforme q. Vogliamo ricavare $\vec{E}(\vec{r})$. Il problema ha un'evidentissima simmetria sferica, il che

ci suggerisce di scegliere una superficie sferica di raggio r, centrata nella carica. A causa della simmetria, il campo elettrico sarà del tipo $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Usiamo il teorema di Gauss

$$4\pi r^2 \epsilon_0 E = q \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r},$$

che è, ovviamente, la formula del campo elettrico di una carica puntiforme!

Esempio 1.2 (Campo elettrico di un filo carico infinito)**.** Facciamo ora un esempio leggermente più complicato. Consideriamo un filo rettilineo infinito che abbia una carica per unità di lunghezza λ. Vogliamo trovare $\vec{E}(\vec{r})$. È evidente la simmetria cilindrica del problema. Stavolta vi è un problema in più non da poco però. Sicuramente abbiamo che $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r)$, ovvero la simmetria cilindrica implica che il modulo del campo elettrico dipenda solo dalla distanza dal filo. Usando le coordinate cilindriche, abbiamo $\vec{E}(r) = E_r(r)\hat{r} + E_\theta(r)\hat{\theta} + E_z(r)\hat{z}$. Ora, sicuramente $E_z = 0$, in quanto se ribaltassimo l'asse z, il problema sarebbe identico a prima, ma $E_z' = -E_z$. Usando questa trasformazione il campo elettrico non può essere cambiato perché il problema è identico. Quindi $E_z' = E_z = -E_z \Rightarrow E_z = 0$. Allo stesso modo, se ci fosse una componente E_θ, il campo avrebbe un *verso di rotazione* definito da $\vec{a} = \hat{r} \times E_\theta\hat{\theta} = E_\theta\hat{z}$. Tuttavia, lungo z vi è una assoluta simmetria di riflessione, quindi, analogamente a prima, si ottiene $E_\theta = 0$. Finalmente, avendo escluso per motivi di simmetria componenti trasverse del campo, possiamo scrivere $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$ e applicare il teorema di Gauss, scegliendo un'opportuna superficie chiusa. La scelta ottimale è abbastanza evidente, prendiamo una superficie cilindrica di altezza h e raggio r, con asse coincidente col filo. Generalmente, il flusso avrà due contributi:

$$\Phi(\vec{E}) = \Phi(\text{laterale}) + \Phi(\text{basi}).$$

Ma, dato che il versore area è ortogonale al campo elettrico nelle basi, il flusso attraverso quelle due superfici è nullo. Rimane quindi il contributo sulla faccia laterale

$$\Phi = 2\pi r h E(r).$$

La carica racchiusa nella superficie è $q = \lambda h$. Quindi, usando Gauss,

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}.$$

Per esercizio, ricaviamo lo stesso risultato svolgendo l'integrale che lega il campo in un punto lontano r dal filo alla distribuzione di carica:

$$\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r^2 + x^2}\frac{r\hat{r}}{(r^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x.$$

Abbiamo potuto scrivere quest'espressione poiché i contributi dovuti alle $\mathrm{d}q$ posizionate a $+x$ e $-x$ sul filo si compensano lungo la direzione parallela al filo e si sommano lungo quella perpendicolare. Effettuando il cambio di variabili $x = r\tan\theta$, otteniamo

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\hat{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{r}{\cos\theta}\frac{1}{r^2 + r^2\tan^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r}\hat{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}.$$

Tutto torna!

Esempio 1.3 (Campo di un piano carico infinito)**.** Consideriamo un piano infinito, con una densità di carica σ uniforme. Vogliamo trovare il campo elettrico in tutto lo spazio. Scegliamo una superficie chiusa adeguata per utilizzare il teorema di Gauss, dopo aver fatto alcune considerazioni di simmetria. Innanzitutto, è ovvio che il campo elettrico debba essere ortogonale al piano e debba avere verso opposto nei due semispazi. Di conseguenza, se chiamiamo con $\hat{x}$ il versore ortogonale al piano, avremo che $\vec{E} = E(x)\hat{x}$, dove d è la distanza dal piano. Consideriamo una qualsiasi figura piana di area A appartenente al piano carico e le facciamo spazzare un volume simmetricamente a sinistra e a destra del piano, percorrendo in entrambi i versi una distanza d. Quello che abbiamo ottenuto è un prisma! Calcoliamo il flusso del campo attraverso questa superficie. Ovviamente, le facce laterali non contribuiscono al flusso del campo in quanto il campo è parallelo alle stesse. Per quanto riguarda le basi, avremo che entrambe contribuiscono di una quantità $E(d)A$, in quanto, in entrambi i casi, campo elettrico ed area hanno la stessa orientazione. Di conseguenza

$$2\epsilon_0 E(d)A = \sigma A \qquad \Longrightarrow \qquad E(d) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \tag{1}$$

Notiamo che il campo elettrico non dipende da d, ovvero ha lo stesso modulo in tutto lo spazio! Per esercizio, proviamo ad ottenere lo stesso risultato facendo un integrale. Calcoliamo il campo elettrico ad una distanza d dall'asse di un disco carico omogeneamente e di raggio R, per poi fare il limite per $R \to \infty$. Consideriamo una corona circolare di raggio r e spessore $\mathrm{d}r$. L'area di questa corona è

$$\mathrm{d}A = \pi(r + \mathrm{d}r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r\,\mathrm{d}r + \pi(\mathrm{d}r)^2 = 2\pi r\,\mathrm{d}r.$$

La carica $\mathrm{d}q$ elettrica contenuta nella corona è

$$\mathrm{d}q = 2\pi\sigma r\,\mathrm{d}r.$$

Questa carica genera il campo elettrico

$$dE = \frac{2\pi\sigma r\,\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0(d^2 + r^2)}.$$

Come nel caso del filo infinito, le componenti trasverse del campo si elidono. Il modulo della componente che sopravvive è

$$dE\cos\theta = dE\frac{d}{\sqrt{d^2 + r^2}}.$$

Integrando su tutto il disco, si trova

$$E = \int_0^R \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{rd}{(r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}r = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_0^{\frac{R}{d}} \frac{\frac{r}{d}}{(1 + \frac{r^2}{d^2})^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\left(\frac{r}{d}\right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_0^{\frac{R}{d}} \frac{x}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right]_0^{\frac{R}{d}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{d}\right)^2}}\right).$$

Facendo il limite $R \to \infty$, il secondo addendo dentro la parentesi quadra tende a zero, quindi ritroviamo il risultato trovato con Gauss.

Esempio 1.4 (Campo e potenziale di un cilindro carico)**.**

Esempio 1.5 (Differenza di potenziale tra due cilindri coassiali)**.**

1.6 Calcolo di campo e potenziale: ricapitoliamo

Ecco un breve schemino per aiutarsi con il calcolo del potenziale e del campo elettrico nei casi di diverse distribuzioni continue di carica.[2]

- Lineare:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{l'} \frac{\lambda(\vec{r}')\,(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,\mathrm{d}l'; \qquad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{l'} \frac{\lambda(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}l';$$

- Superficiale:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}')\,(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,\mathrm{d}S'; \qquad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}S';$$

- Volumica:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')\,(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,\mathrm{d}V'; \qquad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}V'.$$

Con un'opportuna traslazione degli assi del sistema di coordinate, possiamo fare in modo che il punto in cui vogliamo calcolare queste quantità coincida con l'origine. In questo caso, si ha $\vec{r}' = 0$, quindi possiamo semplificare le funzioni da integrare! Sono queste le relazioni da usare per svolgere l'esercizio base alla fine della lezione.

Come facciamo ad evitare di imbatterci in conti che non sappiamo svolgere? Anziché calcolare direttamente il campo elettrico, calcoliamo il potenziale e poi facciamo un derivata! Ci sono molti vantaggi, tra cui il fatto che il potenziale è una quantità scalare, mentre il campo è un vettore. Purtroppo, non possiamo usare questo metodo in alcuni problemi, come quello dell'esempio 1.2: ciò è dovuto ad un'importante problematica dell'integrale

$$V(r) = \int dV = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{\sqrt{r^2+x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Questo integrale diverge! Questo difetto è presente ogni volta che andiamo a calcolare direttamente il potenziale di una distribuzione di carica che all'infinito è non nulla! Quindi, ad esempio, vale anche per un piano carico infinito (Esempio 1.3). Quindi, per distribuzioni infinite di carica, possiamo usare il teorema di Gauss o calcolare il campo elettrico integrando. Ovviamente, dove è possibile, conviene usare il primo metodo.

1.7 Energia potenziale elettrostatica

Abbiamo visto che ad un sistema di due cariche elettriche possiamo associare un'energia potenziale

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d}.$$

[2] **ATTENZIONE** a non confondere il potenziale elettrico col volume! Purtroppo, usiamo la stessa lettera per entrambi, ma, ogni volta che leggerete $V(\vec{r})$ o $V(r)$ si tratta del potenziale. Invece, negli integrali del tipo $\int_V ROBA\ dV$, le V rappresentano il volume.

Ovviamente, se consideriamo un sistema composto da più cariche, per ogni coppia sarà possibile scrivere l'energia potenziale, quindi l'energia del sistema può essere scritta come

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\text{coppie}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

Per far assumere un aspetto più simmetrico a quest'espressione, possiamo notare che, se calcoliamo

$$\sum_i \sum_j q_i q_j,$$

stiamo contando esattamente due volte ogni coppia (oltre a contare anche i casi $i = j$). Quindi possiamo scrivere

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_j q_j}{r_{ij}},$$

che si può estendere al caso di distribuzione continua portando alla formula

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int_V \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, \mathrm{d}V' \, \mathrm{d}V.$$

Notiamo che la quantità

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, \mathrm{d}V'$$

è proprio il potenziale elettrostatico $V(\vec{r})$ generato da una distribuzione volumica di carica! Allora l'energia elettrostatica diventa

$$U = \frac{1}{2} \int_V V(\vec{r})\rho(\vec{r}) \, \mathrm{d}V.$$

Possiamo addirittura trovare un'espressione alternativa in termini del campo elettrico

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 \, \mathrm{d}V.$$

Non ci interessa come si ricava quest'espressione, ma teniamo a mente che essa vale solo per distribuzioni di carica localizzate (cioè limitate in una zona di spazio, non infinite). Nel caso in cui si abbiano distribuzioni di carica infinite, l'energia del campo elettrostatico è infinita!
Ad ogni modo, la quantità integranda $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ è la densità di energia associata al campo elettrico.
Attenzione! Notiamo che c'è una differenza fra le espressioni

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_j q_j}{r_{ij}}$$

e

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 \, \mathrm{d}V.$$

La seconda espressione è sempre positiva, mentre la prima può essere negativa: basta pensare ad un sistema formato da due cariche di segni opposti! Perché succede questo? Consideriamo due cariche q e $-q$ poste a distanza d e calcoliamo l'energia della configurazione:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 \, \mathrm{d}V = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\vec{E}_+ + \vec{E}_-)^2 \, \mathrm{d}V = \frac{\epsilon_0}{2} \int \left(E_+^2 + E_-^2 + 2\vec{E}_+ \cdot \vec{E}_- \right) \mathrm{d}V,$$

dove $\vec{E}_+$ è il campo generato dalla carica positiva, mentre $\vec{E}_-$ è il campo generato dalla carica negativa. Consideriamo il termine misto

$$\int \vec{E}_+ \cdot \vec{E}_- \, \mathrm{d}V = \int \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_+|^3}(\vec{r} - \vec{r}_+) \cdot \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_-|^3}(\vec{r} - \vec{r}_+) \, \mathrm{d}V.$$

Questo integrale restituisce il contributo

$$U = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d}.$$

che è appunto l'energia di interazione elettrostatica tra le due cariche, che è negativa. Cosa rappresentano gli altri due termini dovuti ad E_+^2 e E_-^2? Intanto notiamo che sono positivi. In realtà sono molto positivi, ovvero

$$\int E_+^2 \, \mathrm{d}V = \int \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 \, \mathrm{d}r \sim \int_0^\infty \frac{1}{r^2} \, \mathrm{d}r \to \infty!$$

Questo termine non solo è sempre positivo, ma è pure infinito! Il problema di considerare la carica puntiforme è proprio il fatto che questo termine è infinito. Questo termine non è fisicamente riconducibile all'interazione tra le due cariche (poiché è indipendente dalla presenza dell'altra carica). L'equazione integrale è stata ottenuta immaginando di portare dei volumetti dall'infinito contenenti una carica infinitesima, e non finita. In altre parole, essa tiene conto anche dell'energia spesa per creare effettivamente la carica, mentre in $U = -\dfrac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d}$ si suppone che le cariche puntiformi siano preesistenti, e tale equazione esprime solamente l'energia di interazione tra coppie di cariche. Passiamo a qualche esempio.

Esempio 1.6 (Energia di un guscio sferico uniformemente carico)**.** Consideriamo un guscio sferico di raggio R, carica Q_{tot} (distribuita uniformemente), il cui centro coincide con l'origine del sistema di coordinate. Usando il teorema di Gauss, il campo elettrico nello spazio vale

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}\hat{r} & r > R, \\ \\ 0 & r < R. \end{cases} \tag{2}$$

dove $\sigma \equiv \frac{Q_{tot}}{4\pi R^2}$. Valutiamo quindi l'integrale

$$\int_V \frac{\epsilon_0}{2} E^2(r) \, \mathrm{d}V = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^\infty 4\pi r^2 E^2(r) \, \mathrm{d}r = 2\pi\epsilon_0 \left[\int_0^R 0 \;\, \mathrm{d}r + \int_R^\infty r^2 \left(\frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}\right)^2 \mathrm{d}r \right].$$

Svolgendo i conti, il risultato che si trova è

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q_{tot}^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Allo stesso risultato si arriva usando

$$U = \frac{1}{2}\int_S V(\vec{r})\sigma(\vec{r}) \, \mathrm{d}S,$$

perché basta integrare sulla superficie del guscio, essendo $\sigma(r \neq R) = 0$.

Esempio 1.7 (Energia elettrostatica di una sfera uniformemente carica)**.** Consideriamo una sfera di raggio R, carica Q_{tot} (distribuita uniformemente), il cui centro coincide con l'origine del sistema di coordinate. Usando il teorema di Gauss, il campo elettrico nello spazio vale

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r} & r > R, \\ \\ \frac{Q(r)}{4\epsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\hat{r} & r < R. \end{cases} \tag{3}$$

dove $\rho \equiv \frac{Q_{tot}}{\frac{4}{3}\pi R^3}$. Valutiamo quindi l'integrale

$$\int_V \frac{\epsilon_0}{2} E^2(r)\,\mathrm{d}V = \frac{\epsilon_0}{2}\int_0^\infty 4\pi r^2 E^2(r)\,\mathrm{d}r = 2\pi\epsilon_0 \left[\int_0^R r^2 \left(\frac{\rho r}{3\epsilon_0}\right)^2 \mathrm{d}r + \int_R^\infty r^2 \left(\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}\right)^2 \mathrm{d}r\right].$$

Svolgendo i conti, il risultato che si trova è

$$U = \frac{3}{5}\frac{Q_{tot}^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Un risultato del tutto analogo in gravitazione si ottiene per un pianeta di massa M e raggio R. Allo stesso risultato si arriva usando

$$U = \frac{1}{2}\int_V V(\vec{r})\rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V$$

e ricordando che basta integrare sulla sfera perché $\rho(r > R) = 0$.

1.8 Dipolo elettrico

Un dipolo elettrico è un insieme di due cariche elettriche, una $+q$ e l'altra $-q$, vincolate, in qualche modo, a rimanere ad una distanza fissa d. Per tenere conto dell'orientazione nello spazio del dipolo, considereremo il vettore $\vec{d}$ di modulo d, che segue la congiungente le due particelle ed il cui verso va da quella negativa a quella positiva. Calcoliamo il campo elettrico generato dal dipolo.

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\vec{r}+\frac{\vec{d}}{2}}{|\vec{r}+\frac{\vec{d}}{2}|^3} - \frac{\vec{r}-\frac{\vec{d}}{2}}{|\vec{r}-\frac{\vec{d}}{2}|^3}\right) =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\vec{r}\left(\frac{1}{|\vec{r}+\frac{\vec{d}}{2}|^3} - \frac{1}{|\vec{r}-\frac{\vec{d}}{2}|^3}\right) + \frac{\vec{d}}{2}\left(\frac{1}{|\vec{r}+\frac{\vec{d}}{2}|^3} + \frac{1}{|\vec{r}-\frac{\vec{d}}{2}|^3}\right)\right).$$

Questa formula è esatta. Facciamo qualche approssimazione, supponendo di voler calcolare il campo per a distanze r molto più grandi di s. Possiamo quindi supporre $d/r << 1$, ed approssimare quantità come

$$\left|\vec{r}+\frac{\vec{d}}{2}\right| = \sqrt{r^2 + \vec{d}\cdot\vec{r} + \frac{d^2}{4}} = r\sqrt{1 + \hat{r}\cdot\frac{\vec{d}}{r} + \left(\frac{d}{2r}\right)^2}$$

usando l'espansione $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + O(x^2)$. Il campo elettrico diventa:

$$\vec{E} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\vec{r}}{r^3}\left(\left(1-\frac{3\hat{r}\cdot\vec{d}}{2r}\right)-\left(1+\frac{3\hat{r}\cdot\vec{d}}{2r}\right)\right)+\frac{\vec{d}}{2r^3}\left(\left(1-\frac{3\hat{r}\cdot\vec{d}}{2r}\right)+\left(1+\frac{3\hat{r}\cdot\vec{d}}{2r}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\hat{r}\cdot\frac{3\vec{d}}{r}+\frac{\vec{d}}{r^3}\right) = \frac{3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r}-\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

dove abbiamo definito il vettore dipolo elettrico come $\vec{p} \equiv q\vec{d}$. Questo campo è radiale, ma non centrale! La quantità $\vec{p}\cdot\hat{r}$ rompe la simmetria sferica del sistema, introducendo una dipendenza dall'angolo polare θ.
Calcoliamo anche il potenziale elettrostatico generato dal dipolo, usando la stessa approssimazione di prima.

$$V(\vec{r}) = V_+(\vec{r}) + V_-(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r}+\frac{\vec{d}}{2}|}-\frac{1}{|\vec{r}-\frac{\vec{d}}{2}|}\right).$$

Consideriamo l'espansione al primo ordine in $\frac{d}{r}$:

$$V(\vec{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\left(\left(1-\hat{r}\cdot\frac{\vec{d}}{2}\right)-\left(1+\hat{r}\cdot\frac{\vec{d}}{2}\right)\right) = \frac{q\vec{d}\cdot\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \tag{4}$$

Notiamo che, come per il campo elettrico, la potenza dominante del potenziale (r^{-2}) decresce molto più rapidamente del potenziale generato da una carica puntiforme (r^{-1}).

Cosa succede ad un dipolo elettrico immerso in un campo elettrico uniforme? Calcoliamo la forza totale agente sul dipolo

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q\vec{E} - q\vec{E} = 0,$$

per cui, $\vec{a} = 0$. Per corpi estesi, non basta considerare solo $\vec{F} = m\vec{a}$, bisogna analizzare cosa succede alle quantità legate alla rotazione. Calcoliamo il momento delle forze del campo elettrico esterno rispetto al centro di massa del dipolo. Chiamiamo m_+ ed m_- le masse delle due particelle (nella maggior parte dei casi $m_+ = m_-$). Mettendo l'origine del sistema di coordinate nel centro di massa, per definizione di CDM bisogna avere $m_-\vec{r}_- + m_+\vec{r}_+ = 0$. Sapendo anche che $\vec{r}_+ - \vec{r}_- = \vec{d}$, otteniamo

$$\begin{cases}\vec{r}_+ = \frac{\mu}{m_+}\vec{d},\\ \vec{r}_- = -\frac{\mu}{m_-}\vec{d}.\end{cases}$$

dove $\mu \equiv \frac{m_-m_+}{m_-+m_+}$ è la massa ridotta del sistema. Il momento torcente è, dunque,

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \frac{\mu}{m_+}\vec{d}\times(q\vec{E}) - \frac{\mu}{m_-}\vec{d}\times(-q\vec{E}) = q\vec{d}\times\vec{E}\left(\frac{\mu}{m_+}+\frac{\mu}{m_-}\right) = q\vec{d}\times\vec{E} = \vec{p}\times\vec{E}.$$

Esempio 1.8 (Equilibrio di un dipolo in un campo elettrico uniforme)**.** Supponiamo che un dipolo sia libero di ruotare attorno al punto intermedio tra le due cariche. Chiediamoci quali sono le posizioni per cui il dipolo, se immerso in un campo elettrico omogeneo $\vec{E}$, rimane fermo, cioè non ruota. Per far ciò, basta ricordarci che il momento torcente vale $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} = pE \sin\theta \hat{z}$, dove θ è l'angolo tra il momento di dipolo e la direzione del campo elettrico esterno. Vediamo subito che il momento torcente è nullo quando $\sin\theta = 0$, cioè quando $\vec{p}$ e $\vec{E}$ sono paralleli o antiparalleli. Queste sono configurazioni di equilibrio, ma sono stabili? Cioè, se ruotassimo leggerissimamente il dipolo, il momento torcente lo riporterebbe nella posizione originaria o lo allontanerebbe ancora di più? Si capisce subito che, nel caso in cui i due vettori sono paralleli, l'equilibrio è stabile, mentre l'altro caso rappresenta una posizione di equilibrio instabile. È interessante notare come il momento torcente cerchi di allineare il momento di dipolo con il campo elettrico esterno.
Un altro modo per trovare le posizioni di equilibrio è minimizzare l'energia del sistema. Il dipolo possiede un'energia potenziale dovuta alla sua disposizione nello spazio: infatti, ricordando che $r \gg d$, se si considera l'energia del dipolo come somma delle energie delle due cariche, si trova

$$U_{\text{dipolo}} = -qV(\vec{r}) + qV(\vec{r} + \vec{d}) \approx qV(\vec{r}).$$

Ma ora, se la distanza fra due punti è sufficientemente piccola, la variazione del potenziale può essere pensata come una variazione lineare rispetto alla distanza, e dunque si può scrivere che $V(\vec{r}) = -\vec{E} \cdot \vec{d}$. Ricordando anche $\vec{p} = q\vec{d}$, troviamo

$$U_{\text{dipolo}} = -\vec{E} \cdot \vec{p}. \tag{5}$$

Fermiamoci a riflettere sul significato fisico di questa espressione. La (5) si può riscrivere anche come $U_{\text{dipolo}} = -Ep\cos\theta$: è evidente che il minimo dell'energia si ha quando il dipolo è allineato nel verso del campo elettrico, mentre il massimo si ha quando il dipolo ha verso opposto a quello del campo elettrico. L'espressione $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ ci dice, invece, che il campo elettrico tende a torcere il dipolo e a farlo allineare con il campo elettrico esterno. Dunque, tramite il momento torcente, il campo esterno può convertire l'energia potenziale del dipolo in energia cinetica rotazionale dello stesso. Su questo principio si basano i forni a microonde, che utilizzano campi elettrici alternati per aumentare l'energia cinetica delle molecole d'acqua all'interno del cibo, che viene convertita in energia termica.

2 Conduttori

2.1 Definizioni e proprietà generali

Fino ad adesso abbiamo lavorato con oggetti isolanti, ovvero oggetti in cui le cariche sono vincolate a stare fisse nel punto in cui sono state posizionate, per esempio il piano infinito uniformemente carico o la sfera omogeneamente carica. Materiali come i metalli, invece sono caratterizzati da un'elevata capacità di permettere alle cariche di muoversi al loro interno. Per fare chiarezza tra i due tipi principali di materiali, possiamo dare le seguenti definizioni.

- Si definisce **isolante perfetto** un materiale nel quale le cariche non si muovono, indipendentemente dall'intensità del campo elettrico.

- Si definisce **conduttore perfetto** un materiale che contiene un numero illimitato di cariche di entrambi i segni, libere di muoversi sotto l'azione di un campo elettrico applicato, qualunque sia l'intensità del campo stesso.

Da quest'ultima definizione seguono alcune proprietà dei conduttori quando questi si trovano in condizione di equilibrio elettrostatico.

1. **Il campo elettrico è nullo all'interno del conduttore**. Se così non fosse, allora *non* potremmo trovarci in una condizione di equilibrio statico: dato che tutte le cariche presenti nel conduttore possono muoversi liberamente al suo interno, un elettrone che si trovi in un punto all'interno risentirebbe di una forza netta data dal campo interno, $\vec{F} = e\vec{E}_{int}$, e dato che non risentirebbe di altre forze per ipotesi, non ci troveremmo in condizione di equilibrio. Da questo fatto segue anche che l'intera zona interna alla superficie del conduttore è allo stesso potenziale:
$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_A^B 0 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0,$$
dove il percorso che collega A a B è interno al conduttore.

2. **La densità di carica netta all'interno è nulla.** Questo risultato segue dalla legge di Gauss: presa infatti una qualunque superficie chiusa S contenuta all'interno del conduttore, si avrebbe che
$$\Phi_S(\vec{E}) = \oint_S \vec{E}_{int} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \oint_S \mathbf{0} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0},$$
e, dunque, la carica netta interna è sempre nulla. Pertanto, la carica sarà sempre localizzata sulla superficie esterna.

3. **Il campo elettrico esterno, sulla superficie, è perpendicolare alla superficie stessa.** Se in un punto della superficie il campo elettrico avesse una componente tangenziale, allora questa spingerebbe una qualunque carica localizzata in quel punto verso una posizione diversa, contraddicendo il fatto che il conduttore si trova all'equilibrio elettrostatico. Si può giungere allo stesso risultato utilizzando la relazione di continuità della componente parallela del campo elettrico che verrà discussa alla fine della lezione ($E^{\parallel}_{\text{in}} = E^{\parallel}_{\text{out}}$). Infatti, per l'ipotesi di equilibrio elettrostatico, vale che $E^{\parallel}_{\text{in}} = 0$, da cui sarà nulla la componente parallela del campo anche all'esterno del conduttore. Quindi il campo elettrico sarà perpendicolare alla superficie.

Il teorema di Coulomb La prima cosa da notare quando si parla di conduttori è che questi, anche se sono globalmente neutri, in realtà, come tutta la materia, hanno una certa quantità di carica positiva controbilanciata da altrettanta negativa. Per questo motivo, anche se un conduttore è globalmente neutro, se viene immerso in un campo elettrico esterno, le cariche si possono spostare generando uno sbilanciamento di carica, quindi il conduttore continua a rimanere neutro ma localmente diventa carico. Le cariche in un conduttore sono quindi libere di muoversi all'interno del suo volume. Per riuscire addirittura ad allontanarsi dalla superficie e andare per conto loro nel vuoto è necessario un campo elettrico molto intenso. Di conseguenza, un conduttore, normalmente, non è in grado di cambiare la quantità di carica totale presente su di lui

a meno di essere messo in contatto con altri oggetti.
Alla luce dei risultati appena discussi, diamo ora una descrizione quantitativa della correlazione fra la densità di carica superficiale ed il campo elettrico appena fuori dal conduttore. Avviciniamoci di molto al conduttore. A distanze abbastanza piccole, il conduttore sarà approssimabile ad un piano. Se guardiamo molto vicino, potremo dire che la densità di carica superficiale $\sigma(\vec{r})$ in una regione molto piccola è uniforme. Scegliamo quindi una superficie chiusa e applichiamo il teorema di Gauss. Prendiamo esattamente lo stesso tipo di superficie che abbiamo usato nell'esempio del calcolo del campo elettrico di un piano carico infinito. Stavolta, però, il campo elettrico da un lato è nullo, quindi ci sarà solo un termine a contribuire al flusso.

$$\epsilon_0 E \, \mathrm{d}A = \sigma \, \mathrm{d}A \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n},$$

dove abbiamo indicato con $\hat{n}$ il versore ortogonale alla superficie. Quest'equazione correla il campo elettrico sulla superficie di un conduttore con la densità di carica superficiale locale e prende in nome di *teorema di Coulomb*.

2.2 Condensatori

Un condensatore è un oggetto composto da un insieme di conduttori (in genere due), disposti rigidamente in un certo modo. Nei condensatori veri, c'è sempre un materiale *dielettrico* fra i due, che aiuta a mantenere la geometria dell'oggetto e, come vedremo più avanti, aiuta a separare le cariche positive dalle cariche negative. I condensatori vengono costruiti per diversi motivi. Uno di questi è poter avere campi elettrici abbastanza intensi e controllabili in regioni ristrette. Un altro è immagazzinare energia accumulando carica per poi rilasciarla molto velocemente. Nella situazione più comune, abbiamo condensatori composti da due oggetti metallici molto vicini e su uno dei due vi è una carica elettrica $+q$, mentre sull'altro una $-q$. I due conduttori, essendo all'equilibrio, avranno un potenziale elettrostatico uniforme su tutto il volume e, quindi, avrà senso parlare di differenza di potenziale fra i due conduttori ΔV. Inoltre, proprio per la condizione di equilibrio dei conduttori, segue che il rapporto

$$C = \frac{q}{V}$$

è costante e dipende solo dalla geometria del nostro oggetto. È importante ricordare che q non è la carica totale del condensatore, in quanto essa è nulla, ma è la carica separata, ovvero se su uno dei due conduttori che compongono il condensatore c'è una carica q e sull'altro $-q$, allora la carica separata è q. La costante geometrica C viene chiamata *capacità*. Essa si misura in $\frac{C}{V}$, dove C indica coulomb e V indica i volt. Questa unità di misura viene chiamata F, farad. Fisicamente, in laboratorio e nell'elettronica si ha a che fare con oggetti che hanno capacità dell'ordine dei μF o nF. Condensatori moderatamente grossi sono presenti, ad esempio, all'interno di molti tipi di lavatrici. La loro capacità si aggira intorno ai 15 μF ed è abbastanza grande da uccidere una persona poco prudente.

Esempio 2.1 (Capacità di un condensatore piano)**.** Calcoliamo la capacità di un condensatore fatto in questo modo: prendiamo due superfici conduttrici piatte di area A e forma arbitraria, disposte parallelamente ad una distanza d l'una dall'altra. Considereremo solo il caso $d \ll \sqrt{A}$, in modo da evitare effetti di bordo. Supponiamo

di separare una carica q e calcoliamo $\Delta V(q)$. Dato che abbiamo supposto $d \ll \sqrt{A}$, possiamo considerare le due superfici come piani infiniti di carica. Il campo elettrico generato da ciascuno dei due piani vale

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{q}{2A\epsilon_0}.$$

Dato che le superfici sono due, il campo totale sarà

$$E = \frac{q}{A\epsilon_0}.$$

Dato che il campo è uniforme, il ΔV sarà $E \cdot d$. Otteniamo quindi

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{\frac{qd}{A\epsilon_0}} = \epsilon_0 \frac{A}{d}.$$

Che, in effetti, dipende solo dalla geometria dell'oggetto. Notiamo, inoltre, che più le lastre sono vicine, più aumenta la capacità dell'oggetto. Inoltre, per $r_1 \to r_2$, si ha $C \to \infty$.

Esempio 2.2 (Capacità di un condensatore sferico)**.** Calcoliamo la capacità di un sistema a simmetria sferica fatto nel seguente modo:

- Una sfera di conduttore di raggio r_1;
- Un guscio sferico vuoto fra i raggi r_1 ed r_2,
- Un guscio sferico di conduttore fra i raggi r_2 ed r_3.

Mettiamo una carica q sulla superficie di raggio r_1 ed una carica $-q$ sulla superficie di raggio r_2. La differenza di potenziale sarà

$$\Delta V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Calcoliamo la capacità

$$C = \frac{q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^{-1}.$$

Notiamo che che per $r_1 \to r_2$ si ha $C \to \infty$. Se ora andiamo a fare il $\lim r_2 \to \infty$, fisicamente stiamo considerando un condensatore fatto da una sola sfera di conduttore isolata. La sua capacità sarà, secondo la formula precedente

$$C = 4\pi\epsilon_0 r_1.$$

Stimiamo quanto vale la capacità di una sfera conduttrice grande quanto il pianeta Terra:

$$C_T \approx 4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ F} \approx 7 \cdot 10^{-4} \text{ F}.$$

Molto piccola, nonostante la Terra sia molto grande!

Esempio 2.3 (Capacità di un condensatore cilindrico)**.** Calcoliamo la capacità di un condensatore a simmetria cilindrica fatto nel seguente modo:

- Un cilindro di conduttore fino a r_1;
- Un guscio cilindrico vuoto fra r_1 ed r_2;
- Un guscio cilindrico di conduttore fra r_2 ed r_3.

Lavoriamo nell'approssimazione in cui il cilindro è molto lungo ($h \gg r$). Mettiamo una carica di prova $+q$ sulla superficie di raggio r_1. Si accumulerà di conseguenza una carica $-q$ sulla superficie di raggio r_2. Calcoliamo il campo elettrico usando il teorema di Gauss. Prendiamo un guscio cilindrico di altezza h e raggio r, con $r_1 < r < r_2$. Avremo

$$\epsilon_0 \Phi(\vec{E}) = q \quad \Longrightarrow \quad \epsilon_0 2\pi r h E(r) = q \quad \Longrightarrow \quad E(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r h}.$$

Per simmetria, si ha dunque

$$\vec{E} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r h}\hat{r}.$$

La differenza di potenziale vale

$$\Delta V = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E}(r) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Quindi la capacità del sistema vale

$$C = \frac{q}{|\Delta V|} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Notiamo che che per $r_1 \to r_2$ si ha $C \to \infty$.

2.2.1 Energia immagazzinata in un condensatore

Per accumulare carica su un condensatore è necessario compiere lavoro. Consideriamo un condensatore di capacità C, su cui è già separata una carica q (eventualmente 0). Andiamo ad aumentare la carica separata di una piccola quantità $\mathrm{d}q$. Per farlo, è necessario prendere della carica positiva sull'armatura caricata negativamente e portarla su quella già caricata positivamente. Per far ciò, dobbiamo far attraversare alla carica una differenza di potenziale ΔV già instaurata tra le armature del condensatore. Di conseguenza, il lavoro necessario per portare la carica $\mathrm{d}q$ da una faccia all'altra sarà

$$dL = \Delta V \, \mathrm{d}q = \frac{q}{C} \, \mathrm{d}q.$$

Se il condensatore,inizialmente scarico, viene caricato con una carica Q, il lavoro totale compiuto per separare la carica vale

$$L = \int dL = \int_0^Q \frac{q}{C} \, \mathrm{d}q = \frac{Q^2}{2C}.$$

Dato che questo lavoro non dipende da come viene trasportata la carica, possiamo associare al sistema un'energia potenziale

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C \Delta V^2.$$

Calcoliamo U nel caso particolare di condensatore piano a facce parallele;

$$U = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{A}{d}(Ed)^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 Ad.$$

Ricordando l'espressione per la densità di energia associata al campo elettrico,

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2,$$

ci accorgiamo che $U = uAd$, cioè che l'energia è pari alla densità di energia per la misura del volume in cui il campo è non nullo! Lo stesso vale per condensatori di altre forme. Tutto torna!

2.2.2 Condensatori nei circuiti elettrici

In questa lezione non tratteremo i circuiti elettrici, ma ricordiamoci che la capacità equivalente di più condensatori in parallelo è la somma delle singole capacità

$$C_{equiv} = \sum_i C_i,$$

mentre, per quanto concerne più condensatori messi in serie, il reciproco della capacità equivalente è la somma dei reciproci delle singole capacità

$$\frac{1}{C_{equiv}} = \sum_i \frac{1}{C_i}.$$

Praticamente, le regole di somma sono il contrario di quelle per le resistenze. Questo succede perché, nei casi analoghi di condensatori in serie e di resistori in parallelo, la differenza di potenziale ai capi di tutte le componenti circuitali in gioco è la stessa. Invece, nei casi di condensatori in parallelo e resistenze in serie, le quantità costanti sono, rispettivamente, la carica separata sulle armature e la corrente elettrica.

3 Campi elettrici nella materia

3.1 Introduzione alla polarizzazione

L'equivalente della di legge di Coulomb per due cariche q_1 e q_2, poste a distanza r, in un dielettrico omogeneo è

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}.$$

La presenza di materiale dielettrico nello spazio ove esista un campo elettrico modifica il campo stesso. Questo è dovuto al fatto che gli atomi e le molecole che compongono il materiale si comportano come dipoli microscopici e si polarizzano in seguito all'applicazione di un campo elettrico esterno. L'effetto della polarizzazione elettrica può essere descritto riconducendo la polarizzazione dei dipoli microscopici ad una grandezza vettoriale macroscopica, che descriva il comportamento globale del materiale soggetto alla presenza di un campo elettrico esterno. Tutta questa situazione può essere riassunta introducendo il vettore polarizzazione $\vec{P}$, definito come il dipolo elettrico per unità di volume posseduto dal materiale. La polarizzazione del dielettrico crea una certa quantità di carica elettrica indotta, detta carica di polarizzazione.

Bisogna quindi distinguere due tipi di carica: quella libera ρ_l e quella di polarizzazione ρ_p. Inoltre, in presenza di una polarizzazione $\vec{P}$, le superfici dei corpi posseggono una carica superficiale di polarizzazione pari a

$$\sigma_p(\vec{r}) = \vec{P}(\vec{r}) \cdot \hat{n},$$

dove $\hat{n}$ è il versore normale alla superficie. Tenete a mente questa relazione, è molto importante negli esercizi.
Il vettore $\vec{E}$ è legato alla carica totale (libera + di polarizzazione), mentre il vettore $\vec{P} \equiv \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}$ è legato solo a quella di polarizzazione. Esiste un vettore che è legato[3] solo alla carica libera? Certo! Esso è il vettore *spostamento elettrico*, definito da

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E}.$$

Per questo vettore, vale il teorema di Gauss, leggermente modificato

$$\Phi(\vec{D}) = \frac{1}{\epsilon_0\epsilon_r}\sum q_l,$$

dove q_l è la carica libera totale interna alla superficie.

3.1.1 La miglior definizione di campo elettrico

Quando abbiamo introdotto il campo elettrico nel vuoto, abbiamo parlato di carica di prova. Generalmente, nei libri viene detto che questa carica deve essere molto piccola affinché la sua presenza non perturbi il campo generato dalle altre cariche, che è la quantità che vogliamo *misurare*. Ora, nel vuoto non importa quanto sia grande la carica di prova. Essa non potrà mai perturbare il campo delle altre cariche. Questo perché il vuoto non è polarizzabile. Invece, ciò non vale nei mezzi materiali: l'introduzione di una carica nel sistema fa in modo che si creino delle cariche di polarizzazione, le quali modificano il campo elettrico originario! Ecco perché, nella materia, la carica di prova deve essere più piccola possibile. Più è piccola, più piccole saranno le cariche di polarizzazione e, conseguentemente, più piccolo sarà il campo indotto dalla loro presenza. Quindi

$$\lim_{q_0\to 0}\frac{\vec{F}}{q_0} = \lim_{q_0\to 0}\frac{\vec{F}_{originaria} + \vec{F}_{indotta}}{q_0} = \lim_{q_0\to 0}\frac{q_0\vec{E}_{originario} + q_0\vec{E}_{indotto}}{q_0}.$$

Ma, per quello che abbiamo detto, $\vec{E}_{indotto}$ tende a zero se la carica di prova tende a zero. Quindi

$$\lim_{q_0\to 0}\frac{\vec{F}}{q_0} = \vec{E}_{originario},$$

che è proprio quello che vogliamo.
Esiste, però, un modo migliore di *definire/misurare* il campo elettrico, che **non** richiede di avere cariche di prova molto piccole! Vediamo come fare. Inseriamo una carica di prova q, grande a piacere, nella materia. La forza che agisce su di essa vale

$$\vec{F}_q = q(\vec{E}_{originario} + \vec{E}_{indotto}).$$

[3]La parola *legato* è da intendersi anche come *generato da*. Cioè, le cariche di polarizzazione sono quelle che generano $\vec{P}$, le cariche libere generano $\vec{D}$ e l'insieme di entrambi i tipi di carica genera $\vec{E}$.

Cosa succede se cambiamo segno alla carica? Il campo elettrico originario rimane lo stesso, mentre quello indotto cambia segno! Questo è dovuto alla linearità delle equazioni di Maxwell: le cariche negative generano campi opposti a quelli generati dalle cariche positive. Quindi, la forza che agisce su una carica di prova $-q$ è

$$\vec{F}_{-q} = -q(\vec{E}_{originario} - \vec{E}_{indotto}).$$

Valutiamo $\vec{F}_q - \vec{F}_{-q}$:

$$\vec{F}_q - \vec{F}_{-q} = q(\vec{E}_{originario} + \vec{E}_{indotto}) + q(\vec{E}_{originario} - \vec{E}_{indotto}) = 2q\vec{E}_{originario}.$$

Segue che

$$\vec{E}_{originario} = \frac{\vec{F}_q - \vec{F}_{-q}}{2q}.$$

Quindi, in linea di principio, basta misurare le forze che agiscono su due cariche di prova esattamente opposte per trovare il campo elettrico del sistema! Nel vuoto, il campo indotto è sempre nullo, quindi basta fare una sola misurazione con una sola carica, grande a piacere.

3.2 Condizioni di raccordo

All'interfaccia tra due mezzi diversi, quindi caratterizzati da diversi valori di ϵ_r, non è detto che il campo elettrico sia continuo. Riportiamo di seguito le condizioni di raccordo dei campi, senza dimostrarle.

1. La legge di Faraday implica la continuità della componente del campo elettrico parallela alla superficie
$$E_{2\parallel} = E_{1\parallel}.$$

2. Il teorema di Gauss per il campo elettrico implica che la componente di $\vec{D}$ perpendicolare alla superficie di separazione è discontinua solo se su di essa è presente una densità di carica superficiale *libera*. In formule, si ha
$$D_{2\perp} - D_{1\perp} = \sigma_l,$$
che possiamo riscrivere in termini del campo elettrico
$$\epsilon_2 E_{2\perp} - \epsilon_1 E_{1\perp} = \sigma_l,$$
dove ϵ_1 ed ϵ_2 sono le permittività ($\epsilon_0\epsilon_r$) dei due mezzi all'interfaccia.

Queste relazioni sono **indispensabili** quando bisogna risolvere problemi di elettromagnetismo nella materia!

Esempio 3.1. Consideriamo un condensatore a piastre piane e parallele di area A, riempito da un dielettrico di permittività $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ e spesso d. Quanto valgono il campo elettrico all'interno del dielettrico e la capacità del sistema, se la differenza dio potenziale tra le due armature è fissata dall'esterno? Come cambiano le risposte se, invece, è posta una carica $\pm q$ sulle due piastre?
Per condizioni di simmetria, possiamo concludere che il campo elettrico sia uniforme all'interno del condensatore e perpendicolare alle armature, a meno di effetti di bordo. Il campo all'esterno è nullo per condizioni al bordo all'infinito. Analizziamo separatamente i due casi di interesse:

- se le armature hanno una differenza di potenziale ΔV, allora $\Delta V = Ed$, dunque

$$E_{in} = \frac{\Delta V}{d};$$

- se le armature sono caricate con una carica q, utilizzando le condizioni di raccordo del campo elettrico, si ricava che, all'interno del condensatore, il campo deve essere pari a $E_{in} = \frac{\sigma_{\text{lib}}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$. Quindi, otteniamo

$$E_{in} = \frac{Q}{A\epsilon_0\epsilon_r}.$$

In entrambi i casi, la capacità è la stessa

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d}.$$

Ricordiamoci che essa dipende solo dalla geometria del sistema e dai materiali che lo compongono!

3.3 Energia elettrostatica nella materia

Anzitutto bisogna specificare cosa si intende per energia del sistema quando siamo in presenza di un dielettrico. Solitamente si intende il lavoro necessario per assemblare il sistema nel seguente modo: partiamo con il dielettrico non polarizzato, poi disponiamo la carica libera lasciando rispondere il dielettrico. In questo caso, l'energia risulta essere

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \epsilon_r E^2 \, \mathrm{d}V,$$

dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio.

3.3.1 Forza elettrostatica nella materia

In analogia al caso dei conduttori, le cariche fisse sui dielettrici tendono ad accumularsi nei pressi di cariche libere di segno opposto. Calcolare le forze su un dielettrico può essere tuttavia piuttosto complicato. Esaminiamo un problema molto istruttivo.

Esempio 3.2. Consideriamo una lastra di dielettrico di spessore ℓ che occupa parte dello spazio fra le lastre di un condensatore piano, il quale ha lastre rettangolari di lati a e b distanti ℓ fra loro, con carica $\pm q$. La lastra è solo parzialmente all'interno del condensatore per un tratto di lunghezza x lungo la direzione parallela al lato a. Troviamo la forza elettrica che agisce sul dielettrico.
La difficoltà del calcolo delle forze con un approccio dinamico segue dal fatto che le forze sul dielettrico sono causate dagli effetti di bordo del condensatore: se questi sono trascurati otteniamo un campo elettrico perpendicolare alla direzione lungo la quale può muoversi la lastra. Questo problema può essere aggirato usando un approccio energetico. Per trovare l'energia possiamo usare due metodi diversi: il primo consiste nel calcolare i campi all'interno del condensatore trascurando gli effetti di bordo e tenendo in considerazione le condizioni di raccordo. Il secondo approccio consiste nel modellizzare le due parti come condensatori in parallelo.

Primo Metodo. Consideriamo il campo nell'interfaccia fra il dielettrico e il vuoto all'interno del condensatore. Trascurando effetti di bordo, il campo elettrico deve essere parallelo all'interfaccia tra il dielettrico ed il vuoto tra le lastre. Per le condizioni di raccordo, il campo deve essere continuo attraversando l'interfaccia tra vuoto e dielettrico. Chiamiamo E_0 il campo nel vuoto, E_1 il campo nel dielettrico, $\epsilon_1 = \epsilon_0\epsilon_r$ la permittività del mezzo dielettrico. Abbiamo dunque che $E_0 = E_1 = E$. Ricordando l'espressione per l'energia elettrostatica nella materia, troviamo l'energia totale della configurazione

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\int_{V_0} E^2\,\mathrm{d}V + \int_{V_1} \epsilon_r E^2\,\mathrm{d}V\right) = \frac{\epsilon_0}{2}\left(b\ell x\epsilon_r E^2 + b\ell(a-x)E^2\right).$$

L'unica incognita è il campo elettrico. Chiamiamo q_1 la carica libera posta sulla parte di condensatore a contatto con il dielettrico, q_0 quella sulla parte a contatto con il vuoto. Utilizzando le condizioni di raccordo si ottengono le seguenti relazioni.

$$\begin{aligned} q_1 &= \epsilon_1 E b x, \\ q_0 &= \epsilon_0 b(a-x)E. \end{aligned}$$

Imponendo che $q = q_1 + q_0$, possiamo risolvere il sistema e trovare

$$E = \frac{q}{b\epsilon_0\left(a + (\epsilon_r - 1)x\right)}.$$

Sostituendo nella formula per l'energia, troviamo

$$U = \frac{q^2\ell}{2\epsilon_0 b\left(a + (\epsilon_r - 1)x\right)}.$$

Come calcoliamo la forza? Facendo una derivata!

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = \frac{(\epsilon_r - 1)q\ell}{2\epsilon_0 b(a + (\epsilon_r - 1)x)^2}.$$

Notiamo che F è positiva ($\epsilon_r > 1$), dunque, per come abbiamo scelto x, il dielettrico viene "risucchiato" all'interno del condensatore. L'espressione per questa forza non sarebbe stata ricavabile solamente dalla conoscenza del campo elettrico e delle cariche, a causa dell'approssimazione che abbiamo fatto di ignorare i termini di bordo.

Secondo Metodo. Modellizziamo il sistema come due condensatori collegati in parallelo, uno vuoto e uno completamente riempito dal dielettrico. Allora, dette C_0 e C_1 le loro capacità e C la capacità equivalente del sistema, si ha $C = C_0 + C_1$. Inoltre, dalle espressioni per la capacità di un condensatore piano e del campo in presenza di un dielettrico lineare si ha

$$C_0 = \frac{\epsilon_0(a-x)b}{\ell}, \qquad C_1 = \frac{q_1}{V} = \frac{q_1}{E\ell} = \frac{\epsilon_0\epsilon_r bx}{\ell}.$$

L'energia immagazzinata nel condensatore vale:

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2\ell}{2\epsilon_0 b(a + (\epsilon_r - 1)x)}.$$

Quindi, la forza sul dielettrico è

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = \frac{(\epsilon_r - 1)q\ell}{2\epsilon_0 b(a + (\epsilon_r - 1)x)^2},$$

che è lo stesso risultato trovato usando il primo metodo!

4 Problemi

Problema 4.1 (Esercizio Base - Condizione necessaria per affrontare la Gara Nazionale)**.** Calcolare il campo elettrico ed il potenziale elettrico per le seguenti configurazioni, usando tutti i metodi possibili.

1. Carica q fissa nell'origine;
2. Filo carico infinito con densità di carica lineare λ (omogenea);
3. Piano carico infinito con densità di carica superficiale σ (omogenea);
4. Sfera di raggio R con densità di carica ρ (omogenea);
5. Guscio sferico di raggio R con densità di carica superficiale σ (omogenea);
6. Disco di raggio R e spessore trascurabile, con densità di carica superficiale σ (omogenea). In questo caso, calcolare le quantità richieste solo sull'asse del disco;
7. Anello di raggio R e spessore trascurabile, con densità di carica lineare λ (omogenea). In questo caso, calcolare le quantità richieste solo sull'asse dell'anello;
8. Sfera di raggio R con densità di carica $\rho(r) = \frac{k}{r}$;
9. Piano carico infinito con densità di carica superficiale $\sigma(r) = \frac{k}{r}$. In questo caso, calcolare le quantità richieste solo sull'asse di simmetria del sistema.

Calcolare l'energia elettrostatica per le configurazioni 4, 5 e 8.

Problema 4.2 (Flusso attraverso un cubo)**.** Consideriamo un cubo di lato l con centro nell'origine. Una carica q è posta nel centro del cubo. Quanto vale il flusso del campo elettrico attraverso la superficie del cubo? Quanto vale il flusso attraverso una sola faccia del cubo? Se la carica venisse posta in uno degli otto vertici del cubo, come cambierebbero le risposte alle domande precedenti?

Problema 4.3 (Orbita circolare attorno ad un filo carico)**.** Consideriamo un filo carico infinito, con densità di carica lineare λ, che si estende lungo l'asse $\hat{z}$. Una particella di massa m e carica q (con $q\lambda < 0$), percependo l'attrazione del filo, si muove sul piano xy lungo un'orbita circolare di raggio R, centrata nell'origine. Quanto vale il periodo dell'orbita?

Problema 4.4 (Campo elettrico di due sfere che si compenetrano)**.** Consideriamo due sfere di raggio R, con densità di carica $+\rho$ e $-\rho$, opposte ed omogenee. Esse vengono avvicinate fino a farle compenetrarle. Sia $d < R$ la distanza tra i centri delle due sfere. Quanto vale il vettore campo elettrico nella zona in cui cariche positive e negative si sovrappongono?

Problema 4.5 (Apparente contraddizione tra le condizioni di raccordo - scam)**.** Consideriamo un cilindro neutro, fatto di un materiale con costante dielettrica relativa ϵ_r. Esso viene posto in una regione di spazio vuoto in cui è presente un campo elettrico uniforme $\vec{E}_0$, in modo che il campo sia parallelo al suo asse. Usando le condizioni di raccordo per i campi, trovare quanto vale il campo elettrico all'interno del cilindro. Sembra esserci un problema... dov'è l'inghippo?

Problema 4.6 (Dielettrico tra due armature a potenziale fissato)**.** Considerando l'Esempio 3.2, trova la forza che agisce sulla lastra dielettrica se è la differenza di potenziale ΔV tra le armature ad essere fissata (e non la carica libera $\pm q$).

Problema 4.7 (Capacità di un condensatore a facce piane e tiltate)**.** Facendo riferimento alla Figura 1, calcola la capacità di un condensatore a facce piane ma non parallele.

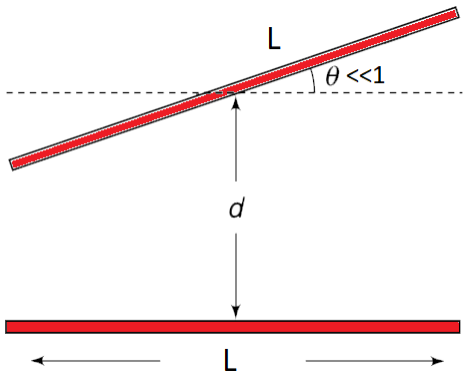

Figura 1: Schematizzazione del condensatore a facce piane non parallele del problema 4.7.

Problema 4.8 (Sfera tra due fluidi)**.** Una sfera conduttrice di raggio R è immersa per metà in un liquido dielettrico di permittività ϵ_1. Al di sopra del liquido è presente un gas di permittività ϵ_2. Depositiamo una carica Q sulla sfera. Calcola i campi $\vec{E}$, $\vec{D}$ e $\vec{P}$ in tutto lo spazio. Trova le densità di carica libera e di polarizzazione presenti sulla superficie della sfera.

Problema 4.9 (Lastre dielettriche dentro un condensatore)**.** Un condensatore piano, composto da due armature quadrate di lato a poste a distanza $h \ll a$, è riempito da due lastre di materiali dielettrici differenti, aventi permittività dielettrica relativa ϵ_{r1} e ϵ_{r2}. La superficie di contatto tra le due lastre si trova in posizione x. Sulle due armature vengono depositate le cariche $\pm q$. Determinare la forza che agisce sulle lastre dielettriche.

Problema 4.10 (Tempo di caduta)**.** Consideriamo due corpi fermi nel vuoto, di masse m ed $M >> m$, cariche q e Q e distanti d. Se vengono rilasciati, quanto tempo impiegano a collidere? Trascurare l'interazione gravitazionale.

Problema 4.11 (Breakdown di Rutherford)**.** L'elettromagnetismo classico non è in grado di spiegare i fenomeni che accadono quando le cariche elettriche sono legate all'atomo. Per esempio, la teoria prevede che una particella carica che accelera irraggi energia sotto forma di onde elettromagnetiche. La potenza elettromagnetica irraggiata da una carica q con accelerazione a, nel caso non relativistico, è

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3},$$

dove c è la velocità della luce.

1. Dimostra la validità della relazione precedente usando l'analisi dimensionale.

2. Schematizziamo l'atomo di idrogeno come un protone (fisso nello spazio) con un elettrone che gli ruota attorno. A causa della perdita di energia, l'elettrone lentamente cadrà sul protone. Se il raggio iniziale dell'orbita dell'elettrone è R, trovare il tempo dopo il quale l'elettrone colliderà col protone, supponendo che l'orbita sia *sempre* approssimabile ad una circonferenza.

Problema 4.12 (Problema dei tre corpi elettrico)**.** Si abbiano tre particelle puntiformi, cariche positivamente, che, inizialmente, giacciono sui vertici di un triangolo, nel vuoto. Siano m_1, m_2 e m_3 le loro masse e q_1, q_2 e q_3 le loro cariche. Dopo esser state rilasciate, si osserva che ognuna di esse si muove lungo una diversa linea retta. Se l'attrazione gravitazionale è trascurabile, quali condizioni devono essere soddisfatte affinché il sistema evolva in questo modo? Trova i tre angoli del triangolo iniziale formato dalle tre particelle, se i loro rapporti carica/massa rispettano la proporzione

$$\frac{q_1}{m_1} : \frac{q_2}{m_2} : \frac{q_3}{m_3} = 1 : 2 : 3.$$

5 Soluzioni

Soluzione 5.1 (Esercizio Base - Condizione necessaria per affrontare la Gara Nazionale)**.** Ecco le soluzioni per le varie configurazioni.

1. $\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$ e $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

2. $\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$ e $V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$. In questo caso, il potenziale all'infinito diverge. Quindi bisogna scegliere un punto a caso nello spazio, distante r_0 dal filo, in cui imponiamo $V = 0$.

3. $\vec{E}(r) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n}$ e $V(r) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(d - d_0)$. In questo caso, il potenziale all'infinito diverge. Quindi bisogna scegliere un punto a caso nello spazio, distante d_0 dal piano, in cui imponiamo $V = 0$.

4. $$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r} & r > R, \\ \\ \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\hat{r} & r < R. \end{cases}$$

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} & r > R, \\ \\ \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} & r < R. \end{cases}$$

5. $$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}\hat{r} & r > R, \\ \\ 0 & r < R. \end{cases}$$

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} & r > R, \\ \\ \frac{\sigma R}{\epsilon_0} & r < R. \end{cases}$$

6. $E(d) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}\right)$ (diretto lungo l'asse) e $V(d) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{d^2+R^2} - d\right] + c$, dove d è la distanza dal piano contenente il disco. In questo caso, calcolare il potenziale integrando il campo elettrico dall'infinito al punto di interesse può dare problemi di divergenza, quindi abbiamo semplicemente integrato l'espressione del campo elettrico senza mettere alcun estremo di integrazione. Abbiamo, quindi, aggiunto la costante additiva arbitraria c.

7. $E(d) = \frac{\lambda R d}{2\epsilon_0\left(d^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ (diretto lungo l'asse) e $V(d) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0\sqrt{d^2+R^2}} + c$, dove d è la distanza dal piano contenente l'anello. In questo caso, calcolare il potenziale integrando il campo elettrico dall'infinito al punto di interesse può dare problemi di divergenza, quindi abbiamo semplicemente integrato l'espressione del campo elettrico senza mettere alcun estremo di integrazione. Abbiamo, quindi, aggiunto la costante additiva arbitraria c.

8. $$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{kR^2}{2\epsilon_0 r^2}\hat{r} & r > R, \\ \\ \frac{k}{2\epsilon_0}\hat{r} & r < R. \end{cases}$$
$$V(r) = \begin{cases} \frac{kR^2}{2\epsilon_0 r} & r > R, \\ \\ \frac{k}{2\epsilon_0}(2R - r) & r < R. \end{cases}$$

9. $E(d) = \frac{k}{2\epsilon_0 d}$ (diretto lungo l'asse di simmetria) e $V(d) = \frac{k}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{d}{d_0}\right)$, dove d è la distanza dal piano. In questo caso, il potenziale all'infinito diverge. Quindi bisogna scegliere un punto a caso nello spazio, distante r_0 dal filo, in cui imponiamo $V = 0$.

Come dimostrato sulle dispense, l'energia elettrostatica della sfera omogeneamente carica vale $U = \frac{3k_eQ^2}{5R}$, mentre quella del guscio sferico è $U = \frac{k_eQ^2}{2R}$. Nel caso della sfera del punto 8, applicando lo stesso identico metodo usato per i due esempi precedenti, si trova che $U = \frac{2\pi k^2 R^3}{3\epsilon_0}$.

Soluzione 5.2 (Flusso attraverso un cubo)**.** Per il teorema di Gauss, il flusso attraverso l'intera superficie del cubo vale $\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$. Per motivi di simmetria, il flusso attraverso una sola delle sei facce vale $\Phi = \frac{q}{6\epsilon_0}$. Nel caso in cui la carica fosse posta in uno degli otto vertici, il flusso attraverso l'intera superficie del cubo sarebbe $\Phi = \frac{q}{8\epsilon_0}$, perché solo un ottavo delle linee di campo della carica lo attraversa. Per quanto concerne le singole facce del cubo, il flusso attraverso ognuna delle tre facce che hanno in comune il vertice in cui è posizionata la carica è nullo (perché il vettore campo elettrico è sempre perpendicolare al vettore superficie). Per simmetria, il flusso attraverso ognuna delle tre facce rimanenti vale $\Phi = \frac{q}{24\epsilon_0}$.

Soluzione 5.3 (Orbita circolare attorno ad un filo carico)**.** Il campo elettrico di un filo carico infinito, a distanza R da esso, vale

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}\hat{r}.$$

La forza elettrica che ne risulta deve fungere da forza centripeta, in modo da consentire il moto circolare uniforme della particella carica. Quindi

$$\frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 R} = m\omega^2 R = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R.$$

Quindi, il periodo dell'orbita vale

$$T = 2\pi R\sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0 m}{\lambda q}}.$$

Soluzione 5.4 (Campo elettrico di due sfere che si compenetrano)**.** Per il principio di sovrapposizione, il campo elettrico in un qualsiasi punto della regione in comune alle due sfere vale

$$\vec{E} = \frac{Q_+}{4\pi\epsilon_0 r_+^2}\hat{r}_+ + \frac{Q_-}{4\pi\epsilon_0 r_-^2}\hat{r}_-,$$

dove $r_\pm$ è la distanza del punto dal centro della sfera carica $\pm$, $\hat{r}_\pm$ è il versore uscente dal centro della sfera rispettiva e $Q_\pm$ è la quantità di carica contenuta all'interno delle sfere di raggio $r_\pm$ (per il teorema dei gusci, il resto della carica non influisce sul campo elettrico). Essendo l sfere cariche omogeneamente, si ha $Q_\pm = \pm\frac{4}{3}\pi r_\pm^3\rho$, quindi il campo elettrico diventa

$$\vec{E} = \frac{\rho r_+}{3\epsilon_0}\hat{r}_+ - \frac{\rho r_-}{3\epsilon_0}\hat{r}_- = \frac{\rho\vec{r}_+}{3\epsilon_0} - \frac{\rho\vec{r}_-}{3\epsilon_0} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\vec{r}_+ - \vec{r}_-\right) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{d},$$

dove $\vec{d}$ è il vettore distanza tra i due centri, che va dal centro della sfera carica positivamente al centro della sfera carica negativamente. Questo ragionamento vale per ogni punto dell'intersezione delle due sfere, quindi il campo elettrico è omogeneo in quella zona!

Soluzione 5.5 (Apparente contraddizione tra le condizioni di raccordo - scam)**.** Applicando la condizione di continuità di $D_\perp$ su una delle due basi del cilindro (non importa quale), si ottene che $E_{dentro} = \frac{E_0}{\epsilon_r}$. Applicando, invece, la condizione di continuità di $E_\parallel$ sulla superficie laterale del cilindro, si ottiene $E_{dentro} = E_0$. A cosa è dovuta questa apparente contraddizione? La verità è che abbiamo sbagliato a fare i conti! Intanto, la presenza di un campo elettrico esterno fa si che si generino delle cariche di polarizzazione sulla due basi del cilindro. Esse fanno in modo che si crei un campo indotto tipo quello in un condensatore ad armature piane e parallele. Quindi, il campo fuori dal cilindro non è più solamente $\vec{E}_0$. Esso non è più uniforme... quindi non sarà più né parallelo alla superficie laterale, né perpendicolare alle basi (lo è solo se il diametro delle basi è molto più grande dell'altezza del cilindro). Il problema può essere risolto approssimativamente con strumenti molto avanzati, per adesso ci basta sapere che i ragionamenti con le condizioni di raccordo sono fallaci in questo caso. Sia chiaro, non sono le condizioni di raccordo ad essere sbagliate, il problema sta nel fatto che i campi appena fuori dal cilindro non sono orientati come noi pensiamo.

Soluzione 5.6 (Dielettrico tra due armature a potenziale fissato)**.** In questo caso, essendo ΔV fissato e q non più costante, conviene usare la relazione per l'energia immagazzinata in un condensatore nella forma in cui non compare q, cioè $U = \frac{1}{2}C\Delta V^2$. La capacità è la stessa di quella calcolata nell'Esempio 3.2, quindi abbiamo

$$U = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 b}{l}\left(a - x + x\epsilon_r\right)\Delta V^2.$$

La forza vale

$$F = \frac{dU}{dx} = \frac{\epsilon_0 b}{2l}(\epsilon_r - 1)\Delta V^2.$$

Soluzione 5.7 (Capacità di un condensatore a facce piane e tiltate)**.** Il trucco sta nel dividere il condensatore in tantissimi condensatori in parallelo, ottenuti immaginando di secare le due armature con dei piani perpendicolari, vicinissimi tra di loro. Sia b la larghezza delle armature e ϵ_0 la permittività dielettrica del vuoto. La capacità di un singolo condensatore sarà

$$\mathrm{d}C = \epsilon_0 \frac{\mathrm{d}A}{z},$$

dove $\mathrm{d}A = b\ \mathrm{d}x$ è la superficie infinitesima del piccolo condensatore e z è la distanza tra le sue armature. Nel sistema di coordinate in cui $x = 0$ quando $z = d$, si ha

$$z(x) = d + x\tan\theta \approx d + x\theta,$$

dove x si estende tra $-\frac{L}{2}$ ed $+\frac{L}{2}$. La capacità del condensatore grande sarà

$$C = \int \mathrm{d}C = \int_A \epsilon_0 \frac{\mathrm{d}A}{z} = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \epsilon_0 \frac{b\ \mathrm{d}x}{d + x\theta} =$$

$$= \frac{\epsilon_0 b}{\theta}\left[\ln\left(d + x\theta\right)\right]_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} = \frac{\epsilon_0 b}{\theta}\ln\left(\frac{d + \frac{L\theta}{2}}{d - \frac{L\theta}{2}}\right).$$

Ricordiamoci che questa relazione vale solo per angoli piccoli. Torna il limite per $\theta = 0$? Controlliamolo:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\epsilon_0 b}{\theta}\ln\left(\frac{d + \frac{L\theta}{2}}{d - \frac{L\theta}{2}}\right) = \lim_{\theta\to 0}\frac{\epsilon_0 b}{\theta}\ln\left(1 + \frac{L\theta}{2d}\right)^2 = \frac{2\epsilon_0 b}{\theta}\frac{L\theta}{2d} = \epsilon_0\frac{A}{d}!$$

Soluzione 5.8 (Sfera tra due fluidi)**.** Potete trovare questo problema e la sua soluzione sul sito web del Professor Andrea Macchi https://osiris.df.unipi.it/~macchi/TEACHING/FISICA2/problems.html. Il problema si chiama *A conducting sphere between two dielectrics*. Vi consiglio anche il suo libro **Problems in Classical Electromagnetism, 157 Exercises with Solutions**, vi sarà sicuramente utile durante l'università.

Soluzione 5.9 (Lastre dielettriche dentro un condensatore)**.** Per risolvere il problema, basta ripetere i conti dell'Esempio 3.2, sostituendo ϵ_{r1} al posto di ϵ_r e ϵ_{r2} al posto di 1. Alla fine, la forza agente sulle lastre vale

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = \frac{(\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2})q\ell}{2\epsilon_0 b(a + (\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2})x)^2}.$$

Soluzione 5.10 (Tempo di caduta)**.** Questo esercizio si può fare in due modi. Uno è molto intelligente, l'altro richiede di integrare l'equazione del moto in modo abbastanza bruto. Seguiamo la prima strada.
Il problema è analogo a quello di due pianeti che si schiantano nel loro centro di massa a causa della forza gravitazionale che li attrae. Nel nostro caso, possiamo supporre che il corpo di massa M non si muova affatto, essendo $M >> m$. Quindi possiamo applicare una versione leggermente modificata delle leggi di Keplero, pensando la traiettoria rettilinea del corpo leggero come un'ellisse degenere, con semiasse maggiore $a = d$. Il tempo che esso impiega a scontrarsi con l'altra è, dunque, pari alla metà del periodo orbitale. Segue che

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0 m}{Qq}}d^{\frac{3}{2}}.$$

Soluzione 5.11 (Breakdown di Rutherford)**.** 1. Per il primo punto, basta sostituire e vedere che i due membri dell'equazione hanno le stesse dimensioni.

2. Calcoliamo il tempo di caduta dell'elettrone sul nucleo, nel caso classico non relativistico. Supponendo che ad ogni rivoluzione il raggio dell'orbita cambi di poco, possiamo considerare l'orbita istantaneamente circolare. Di conseguenza varrà

$$F_{\text{elett}} = m_e\frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = m_e\frac{v^2}{r},$$

da cui si può ricavare v^2 in funzione di r per il calcolo dell'energia cinetica. L'energia potenziale sarà ovviamente

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}.$$

Sommando cinetica e potenziale, si ottiene

$$E(r) = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2}.$$

La potenza emessa per irraggiamento segue la formula di Larmor

$$P = -\frac{e^2a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3},$$

dove il segno "-" ci ricorda che l'energia viene persa. Possiamo sostituire la formula dell'accelerazione, in quanto sarà sempre istantaneamente centripeta.

$$a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m_e r^2},$$

da cui troviamo

$$-\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m_e r^2}\right)^2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},$$

che dopo molte semplificazioni diventa un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{e^4}{12\pi^2 m_e^2\epsilon_0^2 c^3}\frac{1}{r^2}.$$

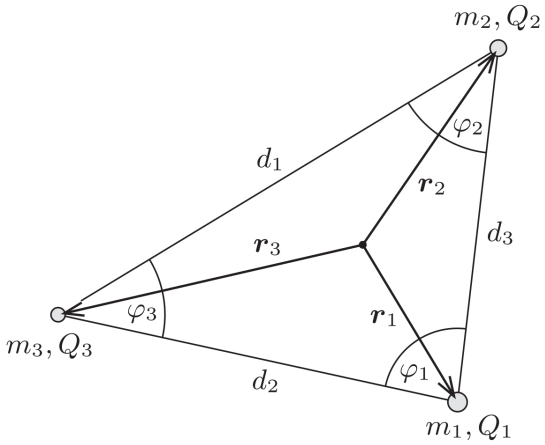

Figura 2: Configurazione del Problema 1.13.

Integrando otteniamo

$$\int_{a_0}^{0} r^2 \,\mathrm{d}r = \int_0^{\tau} -\frac{e^4}{12\pi^2 m_e^2 \epsilon_0^2 c^3}\,\mathrm{d}t$$
$$\implies \tau = \frac{4a_0^3\pi^2 m_e^2 \epsilon_0^2 c^3}{e^4}.$$

Sostituendo i valori delle costanti, l'ordine di grandezza che si ottiene è di 10^{-11} s, cosa che, ovviamente, non è realistica. Gli atomi non dovrebbero esistere secondo la descrizione classica.

Soluzione 5.12 (Problema dei tre corpi elettrico)**.** In assenza di forze esterne, il centro di massa del sistema fatto dalle tre particelle cariche rimane fermo. Perciò è un buon punto da scegliere come origine del sistema di coordinate, in cui $\vec{r}_i$ sono i vettori posizione delle palline. Siano d_i le distanze fra le palline, come in Figura 2. La forza totale che agisce sulla particella 1 è la somma delle forze elettrostatiche esercitate dalle altre due cariche:

$$\vec{F} = m_1\vec{a}_1 = k_e\frac{Q_1Q_2}{d_3^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + k_e\frac{Q_1Q_3}{d_2^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_3), \tag{6}$$

dove $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$. Avendo scelto l'origine nel centro di massa, abbiamo che

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 = 0.$$

Sostituendo $\vec{r}_3$ in Eq. (6), otteniamo

$$m_1\vec{a}_1 = k_eQ_1\left(\frac{Q_2}{d_3^3} + \frac{Q_3}{d_2^3}\left[\frac{m_1}{m_3} + 1\right]\right)\vec{r}_1 + k_eQ_1\left(\frac{Q_3}{d_2^3}\frac{m_2}{m_3} - \frac{Q_2}{d_3^3}\right)\vec{r}_2. \tag{7}$$

La condizione per cui la traiettoria della particella 1 sia una linea retta è che la sua accelerazione deve essere **sempre** parallela al suo vettore posizione. Pertanto, il fattore che moltiplica $\vec{r}_2$ deve annullarsi, quindi $Q_2d_2^3/m_2 = Q_3d_3^3/m_3$. Data la simmetria del problema, lo stesso deve valere per le altre due particelle. Quindi

$$\frac{Q_1}{m_1}d_1^3 = \frac{Q_2}{m_2}d_2^3 = \frac{Q_3}{m_3}d_3^3 = \lambda, \tag{8}$$

dove λ ha lo stesso valore per tutti e tre i corpi, ma non è una costante del moto! Essa cambia col tempo, dato che le distanze d_i via via aumentano. Se le uguaglianze in (8) sono soddisfatte, allora l'accelerazione di ogni particella vale[4]

$$\vec{a}_i = k_e \frac{Q_1 Q_2 Q_3 (m_1 + m_2 + m_3)}{\lambda m_1 m_2 m_3} \vec{r}_i. \tag{9}$$

Perciò, ad ogni tempo fissato, le proporzioni tra i moduli delle accelerazioni sono le stesse di quelle che ci sono tra i moduli delle posizioni rispetto al centro di massa. Di conseguenza, il rapporto delle distanze dall'origine delle tre particelle rimane costante nel tempo! Quindi, in ogni istante, il triangolo che ha per vertici le tre particelle è simile al triangolo iniziale. I rapporti tra i lati del triangolo possono essere trovati usando la condizione (8) e i rapporti carica/massa dati nel testo:

$$d_1 : d_2 : d_3 = \sqrt[3]{\frac{m_1}{Q_1}} : \sqrt[3]{\frac{m_2}{Q_2}} : \sqrt[3]{\frac{m_3}{Q_3}} = 1 : \frac{1}{\sqrt[3]{2}} : \frac{1}{\sqrt[3]{3}}. \tag{10}$$

Usando il Teorema di Carnot si possono ricavare gli angoli del triangolo.

$$\varphi_1 = \arccos\left(\frac{d_2^2 + d_3^2 - d_1^2}{2 d_2 d_3}\right), \varphi_2 = \arccos\left(\frac{d_3^2 + d_1^2 - d_2^2}{2 d_3 d_1}\right), \varphi_3 = \arccos\left(\frac{d_1^2 + d_2^2 - d_3^2}{2 d_1 d_2}\right).$$

[4] basta sostituire la (8) nella (7).